



Универзитет у Бањој Луци
Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет



ИНФО2017

АРХИТЕКТУРА . . . ГРАЂЕВИНАРСТВО . . . ГЕОДЕЗИЈА

УСЛОВИ ПРИЈЕМА И СТУДИРАЊА НА АРХИТЕКТОНСКО-ГРАЂЕВИНСКО-ГЕОДЕТСКОМ ФАКУЛТЕТУ У БАЊАЛУЦИ

ИНФОРМАТОР

за школску 2017/18. годину

Универзитет у Бањој Луци
Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет
Информатор за школску 2017/2018. годину

За издавача

Проф. др Бранкица Милојевић

Уредник

Доц. др Малина Чворо

Техничко уредништво

Драгана Тепић, в. асист.

Маја Илић, в. асист.

Аутори текстова

За студијске програме

Доц. др Малина Чворо

Доц. др Раденко И. Вишњић

Мр Гордана Броћета

Припрема испитних задатака

Математика

Доц. др Сандра Косић-Јеремић

Небојша Ђурић, асист.

Перцепција и презентација простора

Доц. др Малина Чворо

Драгана Тепић, в. асист.

Маја Илић, в. асист.

Слободно цртање

Проф. мр Маја Додиг

Општа култура и информисаност

Доц. др Мирослав Малиновић

Физика

Проф. др Биљана Антуновић

Александар Јанковић, асист.

Дизајн корица

Дубравко Алексић, в. асист.

Лектор

Јелена Пажин

Издавач

Универзитет у Бањој Луци
Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет

Штампа

Електронско издање

Садржај информатора

1.	Уводна ријеч.....	5
1.1	Радни простор и опрема	7
1.2	Структура факултета.....	7
2.	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМИ.....	9
2.1	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ АРХИТЕКТУРА (СПА).....	9
2.1.1	Циљеви студијског програма	9
2.1.2	Профил и квалификација студијског програма.....	9
2.1.3	Исходи учења студијског програма	9
2.1.4	План студијског програма Архитектура	11
2.2	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ ГРАЂЕВИНАРСТВО (СПГ)	13
2.2.1	Циљеви студијског програма Грађевинарство.....	13
2.2.2	Профил и квалификација студијског програма Грађевинарство.....	13
2.2.3	Исходи учења студијског програма Грађевинарство.....	14
2.2.4	План студијског програма Грађевинарство	15
2.3	СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ ГЕОДЕЗИЈА (СПГД).....	18
2.3.1	Циљеви студијског програма Геодезија.....	18
2.3.2	Профил квалификације студијског програма Геодезија.....	19
2.3.3	Исходи учења студијског програма Геодезија.....	19
2.3.4	План студијског програма Геодезија	20
3.	Правилник о полагању пријемног испита.....	22
3.1	Упис на I циклус студија	22
3.2	Поступак полагања пријемног испита.....	23
3.3	Правила понашања кандидата и дежурног на пријемном испиту	23
3.4	Одржавање квалификационог испита и формирање ранг листе	24
4.	Садржај пријемног испита за СПА.....	26
4.1	Математика.....	26
4.1.1	Примјери задатака са рјешењима *	26
4.2	Слободно цртање.....	27

4.2.1	Примјери задатака са бодовима и објашњењима	28
4.3	Тест опште информисаности	37
4.3.1	Примјери задатака са рјешењима	38
4.4	Перцепција и презентација простора	53
4.4.1	Примјери задатака са рјешењима	54
5.	Садржај пријемног испита за СПГ и СПГд	79
5.1	Математика	79
5.1.1	Примјери задатака са рјешењима	80
	Ријешити једначине:	82
	Ријешити неједначине:	82
5.2	Физика	101
5.2.1	Примјери задатака из физике по областима	102
5.3	Примјер пријемног испита за СПАРХ	137
5.4	Примјер пријемног испита за СПГ и СПГд	138

1. Уводна ријеч

Драги ђаци, будући студенти,

Избор професије и упис на факултет представља једну од најважнијих одлука, која снажно утиче на ток вашег будућег живота, могућности вашег раста и развоја на радост и понос вама и вашим породицама и корист друштву у којем живите. Од тог избора умногоме зависи да ли ће бити остварен и испуњен ваш животни циљ и велика очекивања са којима, с пуним правом, улазите у академску заједницу.

Да бисте направили прави избор потребно је да користите свој разум и срце. Разум, који ће вам, помоћи да стекнете представу о томе шта подразумева ваша потенцијална професија, који је дјелокруг послова за које ћете бити квалификовани, гдје и у којим условима их можете обављати, да ли постоји потреба у друштву за тим пословима, каква је могућност вашег даљег напредовања у струци и науци итд. Ако послушајте своје срце, онда требате добити одговор да ли је тај избор оно што волите, желите и да ли се у томе можете пронаћи са својим афинитетима и склоностима. И једно и друго веома је важно за ваш прави избор.

Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет (АГГФ) Универзитета у Бањој Луци припада групи техничких факултета. На своја три студијска програма (СП): СП Архитектура, СП Грађевинарство и СП Геодезија у четворогодишњем првом циклусу студија образује дипломиране инжењере архитектуре, дипломиране инжењере грађевинарства и дипломиране инжењере геодезије. Сва три занимања односе се на послове изградње, уређења и управљања просторним развојем, што је од великог значаја за свако друштво, а посебно за наше просторе на којим је потреба за обновом и убрзаним развојем веома изражена. У уређеном систему регулације простора потреба за сва три занимања је велика, спектар послова широк, а радна мјеста - многобројна. Потребна су у стручним пројектантским, планерским и извођачким фирмама, као и институцијама на локланом и државном нивоу које се баве управљањем просторним развојем и земљишном регистрацијом.

Дипломирани инжењер архитектуре улази у област науке и умјетности и стиче вјештине планирања, пројектовања и грађења нових објеката и изграђених структура. Поред инжењерских способности које се стичу студирањем, пожељно је да има и креативне склоности, јер ће својим професионалним радом моћи да допринесе естетском унапређењу простора у којем живимо, дајући му и лични печат креативности.

Дипломирани инжењер грађевинарства, компетенцијама које стиче на студију, учествује у веома одговорним инжењерским пословима пројектовања и грађења свих објеката

нискоградње и високоградње, као и управљања просторним развојем у разним секторима и на свим нивоима институционалних надлежности државе и локалне самоуправе.

Дипломирани инжењер геодезије стиче компетенције за обављање послова у области земљишне регистрације која је од државног значаја. На нашим просторима још увијек је у току провођење реформе у овој области, што пружа могућност снажнијег укључивања младих кадрова. Све инжењерске и имовинске активности у простору незамисливе су без присуства геодетске струке.

АГГФ Универзитета у Бањој Луци организује и други циклус студија за стицање звања мастера на сва три студијска програма у трајању од једне године. Наставни програми на Факултету су усклађени са Болоњском декларацијом, препознатљиви су и признати на европском образовном простору и омогућавају мобилност студената током студирања.

Драги ђаци, будући студенти, ако је ваш избор неки од студијских програма које нуди АГГФ, храбро приступите полагању пријемног испита. У наредном тексту добићете детаљније информације, упутства и помоћ како бисте се могли адекватно припремити за његово успјешно полагање и стећи услове за упис на овај факултет.

Када постанете наши студенти, наставници и сарадници овог факултета ће вам на одговоран, посвећен и компетентан начин пружити квалитетно образовање за стицање звања којим ћете направити сљедећи велики корак на путу остварења ваших животних циљева.

Срећно,

декан

Проф. др Бранкица Милојевић, дипл. инж. арх.

1.1 Радни простор и опрема

За сада смо смјештени на двије локације у Првом и Другом студен-тском кампусу. Наставни процес се одвија у скромних 2.000 м² (четири учионице-пре-да-ва-оне, четири вјежбаонице, један инфор-ма-ти-чки кабинет, библиотека са читаоницом). Тиме је организација наставног про-це-са некада значајно отежана. Ипак, уз подршку Универзитета започели смо изградњу властитог простора, нове зграде Архитектонско – грађевинско - геодетског факултета у склопу Другог студентског кампуса. Када се остваре услови за прелазак у будућу зграду факултета, нове просторије за одвијање наставе омогућиће нам значајно унапређење образовног процеса.

1.2 Структура факултета

Основна функција факултета је образовна и научно-истраживачка дјелатност. Образовна дјелатност на факултету остварује се кроз студије, као и кроз посебне облике студија за иновацију знања и стално стручно образовање и усавршавање. Научно-истраживачки рад остварује се кроз основна, примјењена и развојна истраживања, која се обављају у циљу развоја науке и струке, подизања квалитета наставе, научног и стручног усавршавања, развоја научног и наставног подмлатка, увођења студената у научни рад, као и стварања материјалних услова за рад и развој факултета.

Факултет остварује програме образовања за профиле грађевинске, архитектонске и геодетске струке кроз студијске програме:

- Архитектура,
- Грађевинарство,
- Геодезија.

Одлуком Вијећа факултета број 14/3.174/16 од 12.02.2016. године, на факултету су активне сљедеће катедре:

- Катедра за архитектонске технологије,
- Катедра за архитектонско пројектовање,
- Катедра за геометрију облика, просторно и графичко представљање,
- Катедра за урбанизам,
- Катедра за историју и теорију архитектуре и заштиту градитељ. наслеђа,
- Катедра за механику и теорију конструкција,
- Катедра за хидротехнику,
- Катедра за материјале и конструкције,
- Катедра за саобраћајнице и геотехнику,
- Катедра за организацију и технологију грађења и грађевински менаџмент
- Катедра за геодезију.

Факултет је организационо подијељен у циљу обезбјеђења потребне кадровске, експерименталне и административно-техничке подршке образовне дјелатности и омогућавања ефикасније реализације научног рада, основних, примјењених и развојних истраживања и стручних дјелатности.

Проф. др Бранкица Милојевић, дипл. инж. арх. изабрана је за декана рјешењем ректора број: 01/04.2-3678/16 од 05.12.2016. на мандат од 4 године који почиње са даном 01.12.2016.

2. СТУДИЈСКИ ПРОГРАМИ

2.1 СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ АРХИТЕКТУРА (СПА)

Пријемни испит на студијском програму Архитектура је први изазов са којим се сусрећу будући архитекти. На нашем факултету желимо дати шансу младима који имају природне склоности за бављење овим послом. Предност дајемо оним кандидатима који имају развијену просторну перцепцију и цртачке способности, склоност ка геометрији и разумију културне и друштвене вриједности средине.

2.1.1 Циљеви студијског програма

Темељни циљ студијског програма Архитектура је обучавање и цјеловито оспособљавање студента за самостални и тимски рад у домену архитектонске професије. Током студија, студенти се припремају да као будући свестрано образовани архитекти рјешавају различите проблеме у домену архитектуре, као и да својим радом допринесу одрживом развоју средине. У оквиру студија будући архитекти се образују да пруже свеобухватна рјешења различитих простора и структура, водећи рачуна о естетским, функционалним, техничким и другим критеријумима, уз поштовање захтјева изграђене и природне средине. Основне академске студије Архитектура трају четири године и вриједе 240 ECTS бодова (*EUROPIAN CREDIT TRANSFER SISTEM* - Европски систем преноса бодова). Сваки семестар студија је вреднован са 30 ECTS бодова. Након одбрањеног дипломског рада студенти стичу звање дипломираног инжењера архитектуре.

2.1.2 Профил и квалификација студијског програма

Предложени студијски програм обезбјеђиће стручан и квалификован профил дипломираног инжењера архитектуре којег пропознаје инжењерска комора, који има могућност да се усавршава кроз праксу, односно да настави образовање прво на мастер студијама а затим и докторским академским студијама. Мобилност завршених студената захтијева препознавање појединачних диплома као потврде формалне едукације. У том смислу наши студенти са стеченим одређеним нивоом едукације могу наставити са усавршавањем у области архитектуре на другим факултетима у земљи и иностранству.

2.1.3 Исходи учења студијског програма

Свршени студенти Архитектуре су способни да на одговарајући начин напишу и презентују резултате свог истраживачког рада, односно графичким средствима конкретизују и представе свој пројектантски рад. Током студија се инсистира на коришћењу информационо - комуникационих технологија као и на оспособљавању

студената да користе савремене програмске пакете за потребе пројектовања и графичке презентације. Студенти су након завршетка студија оспособљени да:

- Конципирају пројекте на основу задатог програма, раде на њиховој разради и координишу рад осталих укључених у процес.
- Организују рад пројектантског тима и припремају документацију за грађење,
- Надгледају или управљају процесом саме изградње објеката.
- Након завршетка студија студент стиче одговарајуће познавање урбанистичког пројектовања, планирања, као и вјештина укључених у планерски процес.
- Адекватно познавање индустрије, организације, регулативе и процедуре вазане за спровођење пројектантског рјешења у изграђени објекат или интеграцију плана у цјелокупни плански систем.

Академски садржај програма концентрисан је између осталог и на размијевање архитектонске професије и улоге архитекте у друштву, а посебно у припреми пројеката који разматрају социјалне факторе. Завршетком основних академских студија студенти стичу и личне компетенције које им омогућавају: коришћење стручне литературе, способност критичког мишљења, способност анализе проблема, синтезе рјешења и рјешавања реалних проблема са којима се сусрећу у пракси. Стичу способност комуницирања и размјене информација и идеја о проблемима везаним за архитектуру са одговарајућим стручњацима унутар и ван струке. Након завршетка студија студенти имају изграђене вјештине учења неопходне за самостално настављање образовања и усавршавања уколико се за то опредјеле.

2.1.4 План студијског програма Архитектура

ПРВА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ЕЦТС	зимски семестар (П+В)	љетни семестар (П+В)
Историја архитектуре и насеља 1	3	1+1	
Архитектонско пројектовање 1	5	1+3	
Ликовна форма	3	1+2	
Архитектонска графика	3	1+2	
Основе урбанизма 1	3	1+2	
Архитектонске конструкције 1	5	2+2	
Материјали у архитектури	4	2+1	
Математика у архитектури 1	4	1+2	
Историја архитектуре и насеља 2	3		1+1
Архитектонско пројектовање 2	5		1+3
Визуелизација и моделовање 1	4		2+2
Ликовно обликовање	4		1+2
Основе урбанизма 2	5		1+3
Архитектонске конструкције 2	5		2+2
Математика у архитектури 2	4		2+2
УКУПНО:	60	25	25
ОБАВЕЗНЕ ВЈЕШТИНЕ			
Рачунари у архитектури 1		1+2	
Рачунари у архитектури 2			1+2

ДРУГА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ЕЦТС	зимски семестар (П+В)	љетни семестар (П+В)
Историја архитектуре и насеља 3	3	1+1	
Архитектонско пројектовање 3 (породично становање)	5	1+3	
Визуелизација и моделовање 2	4	1+3	
Архитектонске конструкције 3	5	2+3	
Механика и отпорност материјала	5	2+3	
Урбанистичка техника	4	1+2	
Просторно-територијално одржив развој	4	1+1	
Историја архитектуре и насеља 4	3		1+1
Архитектонско пројектовање 4 (вишепородично становање)	5		1+3
Архитектонско пројектовање 5 (зграде за образовање)	5		1+3
Физика зграде	2		1+1
Статика конструкција	4		2+2
Архитектонске конструкције 4	4		2+2
Инсталације 1	3		1+2
Урбанистичка композиција	4		1+2
УКУПНО:	60	25	25

ИНФОРМАТОР ЗА ШКОЛСКУ 2017/2018. ГОДИНУ

ТРЕЋА ГОДИНА СТУДИЈА

Предмет	ЕЦТС	зимски семестар (П+В)	љетни семестар (П+В)
Историја умјетности	4	2+1	
Урбанистичко пројектовање 1	4	1+2	
Развој и социологија насеља	2	1+1	
Геодезија у градитељству	3	1+1	
Просторна и градитељска економика	2	1+1	
Архитектонско пројектовање 6 (зграде за рад и трговину)	4	1+2	
Архитектонско пројектовање 8 (зграде за паркирање возила-гараже)	3	1+2	
Естетика у архитектури	2	1+0	
Бетонске конструкције	3	1+2	
Инсталације 2	3	1+2	
Заштита градитељског наслеђа	3		1+1
Урбанистичко пројектовање 2	5		1+3
Архитектура унутрашњих простора 1	4		1+2
Архитектонско пројектовање 7 (зграде за туризам)	5		1+3
Архитектонско пројектовање 9 (зграде за индустрију)	4		1+2
Металне и дрвене конструкције	5		1+4
Организација и извођење радова	4		2+2
УКУПНО:	60	25	25
ОБАВЕЗНЕ ВЈЕШТИНЕ			
Енглески језик у архитектури 1		0+2	
Енглески језик у архитектури 2			0+2

ЧЕТВРТА ГОДИНА СТУДИЈА

Предмет	ЕЦТС	зимски семестар (П+В)	љетни семестар (П+В)
Архитектонско пројектовање 10 (зграде за културу)	5	1+3	
Архитектура унутрашњих простора 2	5	1+4	
Архитектонско пројектовање 11 (пољопривредне зграде)	5	1+3	
Архитектонско пројектовање 12 (зграде за здравство)	5	1+3	
Архитектонско пројектовање 13 (спортске зграде)	5	1+3	
Ревитализација градитељског наслеђа	5	1+3	
Архитектонско пројектовање - изборни програм	5		1+3
Архитектонско инжењерство - изборни програм	5		1+3
Урбанизам - изборни програм	5		1+4
Архитектонска пракса	6		1+4
Завршни рад	9		2+5
УКУПНО:	60	25	25

2.2 СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ ГРАЂЕВИНАРСТВО (СПГ)

2.2.1 Циљеви студијског програма Грађевинарство

Циљ студијског програма је постизање компетенција и академских вјештина из области Грађевинарства, односно образовање стручњака који посједују довољно потребног знања из основа пројектовања и грађења објеката високоградње, хидротехнике и саобраћајница, као и општеобразовног знања. Такође, програм студија Грађевинарства конципиран је и са циљем да омогући развој креативних способности студената, да усаврши њихове способности критичког размишљања, учествовања у тимском раду, излагању и саопштавању својих резултата стручној и широкој јавности, као и да овладају другим специфичним практичним вјештинама потребним струци.

2.2.2 Профил и квалификација студијског програма Грађевинарство

Основне академске студије Грађевинарства I циклуса профилишу се кроз три усмјерења и то: Конструкције, Хидротехника и Саобраћајнице. У оквиру студијског усмјерења "Конструкције" акценат се ставља на основе пројектовања и грађења бетонских, металних и дрвених конструкција. На усмјерењу "Хидротехника" студенти се оспособљавају за основне принципе пројектовања хидротехничких система у области водовода, канализације, мелиорација итд, док у оквиру студијског усмјерења "Саобраћајнице" студенти стичу основна знања из пројектовања путева и железница. Трајање студија је осам семестара (четири студијске године), при чему су прве три године заједничке за студенте свих усмјерења, док се у посљедњој, тј. четвртој години, студенти опредјељују за једно од усмјерења. Сваки семестар студија је вреднован са 30 ECTS бодова (*EUROPIAN CREDIT TRANSFER SISTEM* - Европски систем преноса бодова).

Након успјешно завршених студија стиче се академско звање дипломирани инжењер грађевинарства-240 ECTS, за област која одговара одабраном усмјерењу у четвртој години студија. Такође, заједно са дипломом о стеченом звању издаје се додаток дипломи, који садржи списак положених испита и њихове ECTS вриједности, те друге одредбе које нису наведене у дипломи, а важне су за разумијевање програма студија. Овим додатком приказују се објективни подаци о успјеху током студија, те се омогућава међународна транспарентност и упоредивост диплома.

Предметним студијским планом и програмом обезбијеђује се стручан и квалификован профил дипломираног инжењера грађевинарства, којег препознаје Инжењерска комора и који има могућност да се усавршава кроз праксу, као и наставак образовања најприје на академским мастер студијама из области Грађевинарства и сродним областима, а затим и докторским академским студијама.

2.2.3 Исходи учења студијског програма Грађевинарство

Исходе процеса учења представљају одговарајућа образовна достигнућа студента у стицању очекиваних знања и вјештина које се изучавају, везано за теоријска знања и практичну примјену и употребу тих знања, након завршетка студијског програма, односно одабраног усмјерења.

Завршетком основних академских студија Грађевинарства, осим горенаведеног, студент стиче следеће компетенције:

* личне компетенције

- посједовање основних знања (метода и техника истраживања) потребних за разумијевање процеса планирања, пројектовања, грађења и одржавања грађевинских објеката,
- строго придржавање закона, стандарда и моралних и етичких норми струке и
- способност комуницирања и размјене информација и идеја о проблемима везаним за грађевинску струку са одговарајућим стручњацима унутар и ван струке;

* академске компетенције – стичу се основна знања из области планирања, пројектовања, грађења и одржавања грађевинских објеката нискоградње, хидроградње и високоградње, те могу обављати следеће послове:

- учешће у изради планске, студијске и техничке документације за изградњу грађевинских објеката,
- учешће у изградњи за све врсте грађевинских радова као самостални руководиоци,
- организовање рада грађевинске механизације и опреме и самостално обављање контроле извршених радова,
- стручни надзор при изградњи грађевинских објеката,
- израда пројеката, провођење истражних радова и координација послова везаних за истраживања из подручја механике тла и фундирања објеката и
- коришћење савремених рачунара и програма при прорачуну конструкција и изради писане и графичке документације.

2.2.4 План студијског програма Грађевинарство

ПРВА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Линеарна алгебра и аналитичка геометрија	4,5	2+2	
Диференцијални и интегрални рачун 1	7	3+3	
Нацртна геометрија и техничко цртање	7	3+3	
Информатика 1	4,5	2+2	
Увод у грађевинарство	2,5	2+0	
Грађевинске конструкције 1	4,5	2+2	
Диференцијални и интегрални рачун 2	7		3+3
Грађевинска физика	7		3+3
Информатика 2	4,5		2+2
Грађевинске конструкције 2	4,5		2+2
Техничка механика 1	7		3+3
УКУПНО:	60	26	26

ДРУГА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Вјероватноћа и статистика	5	2+2	
Техничка механика 2	5	2+2	
Отпорност материјала 1	5	2+2	
Грађевински материјали 1	5	2+2	
Инжењерска геологија	5	2+2	
Планирање инфраструктуре	3,5	2+1	
Еколошко инжењерство	1,5	2+0	
Конструктерско инжењерство 1	4		2+1
Отпорност материјала 2	6		3+2
Грађевински материјали 2	5		2+2
Механика флуида	5		2+2
Геодезија	5		2+2
Пројектовање и надзор	2,5		1+1
Грађевинска регулатива	2,5		2+0
УКУПНО:	60	25	24
ОБАВЕЗНЕ ВЈЕШТИНЕ			
Страни језик 1 и 2		0+2	0+2

ТРЕЋА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Статика конструкција 1	5	2+2	
Механика тла	5	2+2	
Конструктерско инжењерство 2	5	2+2	
Основе хидраулике	5	2+2	
Путеви	5	2+2	

ИНФОРМАТОР ЗА ШКОЛСКУ 2017/2018. ГОДИНУ

Технологија грађења	5	2+2	
Статика конструкција 2	5		2+2
Конструктерско инжењерство 3	3		1+2
Фундирање	5		2+2
Хидрологија	5		2+2
Жељезнице	5		2+2
Организација грађења	5		2+2
Инжењерска економија	2		1+1
УКУПНО:	60	24	25

ЧЕВРТА ГОДИНА СТУДИЈА - КОНСТРУКТИВНО УСМЈЕРЕЊЕ

Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Управљање пројектима	2,5	1+1	
Инжењерска етика	2,5	2+0	
Металне конструкције 1	5	2+2	
Бетонске конструкције 1	5	2+2	
Дрвене конструкције	5	2+2	
Изборни предмет 1	5	2+2	
Изборни предмет 2	5	2+2	
Динамичка анализа конструкција	5		2+2
Изборни предмет 1	5		2+2
Изборни предмет 2	5		2+2
Стручна пракса	5		0+5
Завршни рад за први степен	10		0+11
УКУПНО:	60	24	12

ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ - КОНСТРУКТИВНО УСМЈЕРЕЊЕ

Технологија бетона	5	2+2	
Зидане конструкције	5	2+2	
Метод коначних елемената	5	2+2	
Инсталације у зградама	5	2+2	
Технологија производње и монтаже конструкција	5		2+2
Хидротехничке конструкције	5		2+2
Металне конструкције 2	5		2+2
Бетонске конструкције 2	5		2+2

ЧЕВРТА ГОДИНА СТУДИЈА - САОБРАЋАЈНО УСМЈЕРЕЊЕ

Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Управљање пројектима	2,5	1+1	
Инжењерска етика	2,5	2+0	
Пројектовање путева	5	2+2	
Пројектовање жељезница	5	2+2	
Доњи строј саобраћајница	5	2+2	
Изборни предмет 1	5	2+2	
Изборни предмет 2	5	2+2	
Коловозне конструкције	5		2+2
Изборни предмет 1	5		2+2
Изборни предмет 2	5		2+2
Стручна пракса	5		0+5

ИНФОРМАТОР ЗА ШКОЛСКУ 2017/2018. ГОДИНУ

Завршни рад за први степен	10		0+11
УКУПНО:	60	24	12
ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ - САОБРАЋАЈНО УСМЈЕРЕЊЕ			
Саобраћајнице и простор	5	2+2	
Саобраћајнице и животна средина	5	2+2	
Инжењерска геодезија	5	2+2	
Примјена савремених материјала код саобраћајница	5	2+2	
Жељезничке станице и чворови	5		2+2
Горњи строј жељезница	5		2+2
Градске саобраћајнице	5		2+2
Пројектовање депонија	5		2+2

ЧЕВРТА ГОДИНА СТУДИЈА – ХИДРОТЕХНИЧКО УСМЈЕРЕЊЕ			
Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Управљање пројектима	2,5	1+1	
Инжењерска етика	2,5	2+0	
Рачунска хидраулика	5	2+2	
Инжењерска хидрологија	5	2+2	
Регулација ријека	5	2+2	
Изборни предмет 1	5	2+2	
Изборни предмет 2	5	2+2	
Комунална хидротехника	5		2+2
Изборни предмет 1	5		2+2
Изборни предмет 2	5		2+2
Стручна пракса	5		0+5
Завршни рад за први степен	10		0+11
УКУПНО:	60	24	12
ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ - ХИДРОТЕХНИЧКО УСМЈЕРЕЊЕ			
Инсталације у зградама	5	2+2	
Инжењерска геодезија у хидротехничкој пракси	5	2+2	
Квалитет воде	5	2+2	
Наводњавање	5	2+2	
Хидротехничке конструкције	5		2+2
Основе фундаирања хидротехничких конструкција	5		2+2
Дренажни системи	5		2+2
Планирање, грађење и одржавање хидротехничке инфраструктуре	5		2+2

2.3 СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ ГЕОДЕЗИЈА (СПГД)

2.3.1 Циљеви студијског програма Геодезија

Основни циљеви Првог циклуса студија СПГД је стицање знања, способности и вјештина за рад на стваралачким, посебним и практичним пословима у државном премјеру и катастру непокретности и геодетским инжењерско-техничким областима.

Осим наведеног, СПГД доприносиће и остварењу следећих циљева:

- постицање неопходних знања, вјештина и способности из ужих научних области Геодезије;
- стицање неопходних практичних знања у рјешавању геодетских стручних проблема;
- развој склоности за тимски рад;
- обезбјеђивање услова за наставак даљег школовања и усавршавања и
- припремање за запошљавање геодетских стручњака на домаћем и страном тржишту радне снаге.
- Токови савременог високошколског образовања, прописи и програми у области геодетске дјелатности и Оквир високошколских квалификација у БиХ (2008), дефинишу опште циљеве Првог циклуса студија СПГД:
- разумијевање и савлађивање знања у области Геодезије, који се темеље, проширују и/или надограђују на средњешколско образовање;
- примјена знања, вјештина и способности у рјешавању проблема ширег и/или вишедисциплинарног садржаја који је повезан са области Геодезије;
- примјена стваралачког и научног размишљања, чиме се омогућава:
- критичко оцјењивање тренутног истраживачког и академског рада на највишем нивоу у Геодезији,
- оцјењивање различитих методологија, заузимање критичких мишљења и понуда другачијих рјешења;
- способност обједињавања знања и рјешавање сложених задатака, као и извођење закључака на основу непотпуних или ограничених почетних података и информација;
- преношење закључака, знања и размишљања слушаоцима и саговорницима - јасно и недвосмислено;
- способност подизања знања на виши ниво, разумијевање области студија и непрекидно развијање сопствених вјештина, кроз самостално учење и развој;
- овладавање вјештином учења, која омогућава наставак студија, углавном, самоусмјерено и самостално;
- стицање личних и вјештина тимског рада, примјерених различитим садржајима учења и дјелатностима и показивање способности вођења и/или покретања развоја и давање доприноса промјенама и развоју.

2.3.2 Профил квалификације студијског програма Геодезија

Стручна напредна знања, вјештине и способности (компетенције), који се стичу успјешним завршетком првог циклуса (240 ЕСПБ/ECTS) академских студија Студијског програма Геодезија, омогућавају:

- извођење геодетских радова у одређивању геодетских референтних површи и у успостављању геодетских референтних система,
- извођење геодетских мјерења, метролошког обезбјеђења, геодетског премјера, изравнавања резултата геодетских мјерења, геодетско-инжињерских радова и управљања геодетским радовима,
- успостављање, одржавање и управљање катастром непокретности, управљање непокретностима, уређење земљишта,
- успостављање, одржавање и управљање инфраструктуром просторних података,
- извођење геодетских радова у областима фотограметрије и даљинског истраживања,
- извођење геодетско-картографских радова у областима математичке, опште, тематске и дигиталне картографије.

2.3.3 Исходи учења студијског програма Геодезија

Квалификације које се стичу успјешним завршетком првог циклуса (240 ЕСПБ/ECTS) академских студија Студијског програма Геодезија:

- напредно знање, изузетно разумијевање и успјешно рјешавање сложених инжењерских задатака и проблема,
- напредна примјена стечених знања и врхунско познавање и коришћење рачунарских система и модела при рјешавању сложених инжењерских проблема,
- способност прикупљања и тумачења одговарајућих података, информација, идеја и доношење закључака који обухватају и погледе на одговарајућа друштвена, етичка и научна питања,
- могу преносити садржаје, задатке, идеје и рјешења упућеним и неупућеним слушаоцима и саговорницима и сарађивати у истраживању и раду стручних радних група и тимова,
- изграђене вјештине учења неопходне за самостално настављање образовања и усавршавања.

2.3.4 План студијског програма Геодезија

ПРВА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Линеарна алгебра и аналитичка геометрија	5	2+2	
Диференцијални и интегрални рачун 1	7	3+3	
Информатика за геодете 1	4	1+2	
Нацртна геометрија и техничко цртање	6	2+4	
Основе геодетских наука	3	2+0	
Технике геодетских мјерења 1	5	2+2	
Диференцијални и интегрални рачун 2	7		3+3
Физика	5		2+2
Информатика за геодете 2	6		2+3
Основе земљишно-књижног права	2		2+0
Технике геодетских мјерења 2	5		2+2
Електроника у геодезији	5		2+2
УКУПНО:	60	25	25

ДРУГА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Математика за геодете	5	2+2	
Рачун изравнања 1	5	2+2	
Геодетски премјер 1	5	2+2	
Еколошко инжењерство	2	2+0	
Инжењерска геологија	2	2+0	
Геодетска метрологија	5	2+2	
Катастар непокретности 1	5	2+2	
Геодетски премјер 2	5		2+2
Геоинформатика 1	5		2+2
Фотограмetriја и даљинска детекција 1	7		3+3
Картографија 1	5		2+2
Рачун изравнања 2	5		2+2
Практична настава из геодетског премјера	4		0+3
УКУПНО:	60	24	25

ТРЕЋА ГОДИНА СТУДИЈА			
Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Геодетски премјер 3	5	2+2	
Фотограмetriја и даљинска детекција 2	5	2+2	
Геоинформатика 2	6	3+2	
Картографија 2	5	2+2	
Инжењерска геодезија 1	5	2+2	
Геодетска астрономија	4	2+1	
Сателитска геодезија	4		2+1
Инжењерска геодезија 2	5		2+2

ИНФОРМАТОР ЗА ШКОЛСКУ 2017/2018. ГОДИНУ

Практична настава из геодезије	3		0+3
Картографске пројекције	5		2+2
Теоријска геодезија	3		2+0
Физичка геодезија	4		2+1
Уређење земљишне територије	3		2+1
Практична настава из инжењерске геодезије	3		0+3
УКУПНО:	60	24	25
ОБАВЕЗНЕ ВЈЕШТИНЕ			
Страни језик (Енглески језик) 1 и 2		0+2	0+2

ЧЕВРТА ГОДИНА СТУДИЈА

Предмет	ECTS	Зимски семестар (П+В)	Љетни семестар (П+В)
Основе организације геодетских радова	2	1+1	
Теорија сателитског позиционирања	5	2+2	
Инжењерска геодезија 3	5	2+2	
Рачун изравнања 3	5	2+2	
Геоинформациони системи	4		2+1
Геодетске референтне мреже	4		2+1
Комасација	5		2+2
Дигитална фотограмetriја	4		2+1
Завршни рад за први степен	5		1+4
ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ 1:			
Деформациона анализа инжењерских објеката	4	2+1	
Глобални навигациони сателитски системи	4	2+1	
Инжењерска фотограмetriја	4	2+1	
ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ 2:			
Геодезија у индустрији	5	2+2	
Обезбјеђење квалитета геодетских мјерења	5	2+2	
Дигитална обрада сигнала	5	2+2	
ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ 3:			
Управљање пројектима у геодезији	4	2+1	
Објектно оријентисано програмирање	4	2+1	
Процјена вриједности непокретности	4	2+1	
ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ 4:			
Страни језик струке	3		1+2
Прописи у геодетској струци	3		1+2
Дигитално моделовање слика	3		1+2
ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТИ 5:			
Геодетски референтни системи	5	2+2	
Методологија пројектовања у геодезији	5	2+2	
Састављање и умножавање планова и карата	5	2+2	
УКУПНО:	60	24	25

3. Правилник о полагању пријемног испита

3.1 Упис на I циклус студија

У прву годину Студијских програма Архитектура, Грађевинарство и Геодезија, на конкурентској основи, може се уписати лице које има четворогодишње средњешколско образовање стечено у Републици Српској, Брчко дистрикту и Федерацији БиХ или еквивалентно образовање у иностранству.

Вредновање резултата кандидата врши се на основу резултата постигнутих у претходном средњешколском образовању и на пријемном испиту. Кандидат који је средње образовање стекао у иностранству може приступити полагању пријемног испита, под условом да је претходно извршио нострификацију дипломе средње школе. Кандидат има право да полаже пријемни испит на језику који је у службеној употреби у БиХ.

Страни држављанин може да се упише на студијски програм АГГФ под истим условима као и домаћи држављанин. Трошкове школарине, страни држављанин плаћа у току цијелог школовања, осим ако, међународним или билатералним споразумом Универзитета у Бањој Луци, није другачије одређено.

Кандидати, приликом пријаве на конкурс, подносе оригинална документа, а уз пријавни лист предају и:

- свједочанства сва четири разреда средње школе или документе о еквивалентном школовању у иностранству;
- диплому о положеном завршном, односно матурском испиту;
- доказ о уплати накнаде за полагање пријемног испита, као и остале документе предвиђене Конкурсом.

Кандидати, који су школовање завршили у иностранству, дужни су доставити доказ о нострификацији дипломе и превод свих докумената на једном од службених језика БиХ.

Сви потребни формулари се могу набавити у Студентској служби Архитектонско-грађевинског факултета. Приликом предаје пријаве кандидату ће бити овјерена потврда о предатој пријави на конкурс и у њу ће бити уписан број пријаве. Ову потврду кандидат треба да сачува као доказ да је предао документа и да је носи са собом на полагање квалификационог испита.

Списак са подацима о кандидатима биће уређен по азбучном редосљеду и биће истакнут на огласној табли и вратима просторије у којој ће кандидат радити квалификациони испит и објављен на интернет страници факултета www.aggfbl.org прије почетка пријемног испита.

Уколико се испостави да је неком од кандидата погрешно написано име или презиме ова грешка ће бити исправљена, али се неће формирати нова азбучна листа.

3.2 Поступак полагања пријемног испита

Полагање пријемног испита обавезно је, без обзира на број пријављених кандидата. Право на рангирање стиче кандидат који је положио пријемни испит.

Максималан број остварених бодова на пријемном испиту је 50. Минимални број бодова за успјех на испиту на студијском програму сваке године прописује Сенат Универзитета.

Садржај пријемног испита утврђује се за сваки студијски програм који се изводи на АГГФ. Пријемни испит полаже се писмено. Мјерила бодовања задатака, као и број бодова по задатку, јасно су дефинисана у испитном материјалу.

Пријемни испит је анониман и ради се под шифром.

Пријемним испитом провјеравају се знања, вјештине и способности кандидата из сљедећих области Студијских програма:

Студијски програм Архитектура

Математика – 10 бодова

Слободноручно цртање – 10 бодова

Општа култура и информисаност – 10 бодова

Перцепција и презентација простора – 20 бодова

Студијски програм Грађевинарство

Математика – 35 бодова

Физика – 15 бодова

Студијски програм Геодезија

Математика – 35 бодова

Физика - 15 бодова

3.3 Правила понашања кандидата и дежурног на пријемном испиту

На пријемни испит кандидати су дужни понијети документ за идентификацију (лична карта или пасош), потврду о пријави, овјерену приликом подношења документа, прибор за писање и цртање и џепни рачунар.

Текст задатка на пријемном испиту, кандидат добија од дежурног. По завршетку идентификације, личну карту или пасош кандидат треба обавезно склонити са стола, тако

да на столу остане само прибор за писање и цртање, потврда о пријави и материјал добијен од дежурног. Прије почетка пријемног испита дежурни ће провјерити идентитет кандидата.

Начин попуњавања и рјешавања задатака пријемног испита зависи од врсте задатка. Упутство за попуњавање треба бити описано у испитном материјалу.

Од тренутка подјеле задатака није дозвољен никакав разговор између кандидата. Уколико кандидати разговарају међусобно, или се користе недозвољеним средствима, биће удаљени са пријемног испита и искључени (дисквалификовани). На пријемном испиту је забрањен разговор кандидата са дежурнима, а позивања на усмено добијена упутства неће бити уважавана. Када кандидат сматра да је завршио са испитом, позива дежурног дизањем руке. Дежурни узима образац за одговоре од кандидата и потписује потврду о пријави и текст задатка. Након тога кандидат може изаћи из сале за полагање пријемног испита. Потврду о пријави треба сачувати, јер је она доказ да је кандидат предао задатак. После почетка испита није дозвољен одлазак у тоалет. Излазак из сале је могућ, најраније, један сат после почетка испита, уз обавезну предају испитног материјала. Повратак у салу није могућ прије завршетка испита. По истеку предвиђеног рока за израду задатака, кандидат затвара добијен текст задатка, ставља га са стране стола и сачека дежурног да преузме задатак и потпише потврду о пријави. Након тога кандидат може изаћи из сале за полагање пријемног испита.

3.4 Одржавање квалификационог испита и формирање ранг листе

Датум одржавања квалификационог испита је одређен јавним Конкурсом за упис студената у прву годину основних студија на факултете и више школе у школској 2016/2017. години.

Конкурс расписује Универзитет у Бањалуци у дневним новинама Глас Српске.

Вријеме одржавања квалификационог испита ће бити објављено у Конкурсу, на огласној табли Факултета и на интернет страници факултета: www.aggfbl.org.

Избор кандидата за упис у прву годину студија обавља се према резултату постигнутом на пријемном испиту и према општем успјеху из средње школе. Под општим успјехом у средњој школи подразумијева се средња оцјена из свих предмета у првом, другом, трећем и четвртном разреду (заокружена на двије децимале), која се при бодовању множи са десет. Највећи број бодова, према општем успјеху кандидата, износи 50.

Редослијед кандидата за упис на студиј регулисан је ранг-листом. Она се утврђује на основу општег успјеха постигнутог у средњем образовању и резултата постигнутих на пријемном испиту. Кандидат може оставити највише 100 бодова. Комисија за пријемни испит, за сваки студијски програм, утврђује број бодова по областима, коначан број бодова кандидата и на основу њих прелиминарни редослијед (ранг листу) кандидата. Ранг листа,

са бројем бодова, по областима и укупним бројем освојених бодова, објављује се на интернет страници и огласној табли АГГФ.

Кандидат може поднијети приговор, у писаном облику, на оцјене резултата пријемног испита, у року дефинисаном у складу са Конкурсом, од објављивања прелиминарне ранг-листе на факултету. У приговору се мора јасно образложити на који дио пријемног испита кандидат улаже жалбу. Начин рјешавања жалбеног поступка описан је у Правилнику о полагању пријемног испита и о упису кандидата на АГГФ УНИБЛ.

Број кандидата за упис на студијски програм, као и однос студената чије школовање се финансира из буџета и самофинасирајућих студената одређује ресорно Министарство. У случају да два кандидата имају једнак укупан број бодова, предност има кандидат који је остварио већи број бодова на пријемном испиту.

Кандидат може бити уписан на терет буџета, ако је положио пријемни испит и на коначној ранг-листи рангиран у оквиру броја одобреног за упис кандидата на терет буџета. Кандидат може бити уписан као самофинансирајући студент уколико је положио пријемни испит и на коначној ранг-листи рангиран у оквиру броја одобреног за упис.

Ако кандидат, који је остварио право на упис, не изврши упис у року утврђеном у Конкурсу, умјесто њега се уписује сљедећи кандидат, према редосљеду утврђеном у коначној ранг листи.

Кандидати који положе пријемни испит на СП Грађевинарство, а не буду рангирани довољно високо за упис на тај Студијски програм или положе пријемни испит, а промијене мишљење, могу пријављивањем у Студентској служби уписати СП Геодезија, ако на њему није попуњен број уписаних кандидата и обрнуто.

4. Садржај пријемног испита за СПА

4.1 Математика

Бодови	10
Вријеме рјешавања теста	45 мин

Од кандидата се очекује да покаже елементарно знање из математике, првенствено из области који су обрађиване у већини средњих школа. Тражено предзнање из математике је основ за даље праћење градива из математике и неких стручних предмета који се изучавају на студијском програму архитектура. Такође, способност логичког закључивања и размишљања је важно у образовању свих будућих инжењера архитектуре.

Области које се полажу на квалификационом испиту:

- Полиноми и рационални алгебраски изрази.
- Линеарне једначине и неједначине.
- Проблеми који се свode на рјешавање линеарних једначина.
- Размјера и пропорција.
- Степеновање и корјеновање.
- Квадратна функција, квадратне једначине и неједначине.
- Експоненцијална функција, експоненцијалне једначине и неједначине.
- Основна правила логаритмовања, логаритамске једначине и неједначине.
- Тригонометрија правоуглог троугла, основне тригонометријске идентичности. тригонометријске функције, тригонометријске једначине и неједначине
- Планиметрија (троугао, квадрат, паралелограм, ромб, правоугаоник, трапез)
- Стереометрија (призма, паралелопипед, коцка, пирамида, купа, ваљак)
- Једначине праве и кружнице и њихови графици.

Литература: Вене I, II, III и књиге за први, други и трећи разред средњег усмјереног образовања.

Начин бодовања и оцјењивања задатака:

На тесту се даје 4 задатка из наведених области. Два задатка носе по 2 бода и 2 по 3 бода. Бодују се и половично или дјелимично урађени задаци.

4.1.1 Примјери задатака са рјешењима *

* Примјери задатака из математике дати су у дијелу Пријемног испита за СПГР и СПГЕО

4.2 Слободно цртање

Бодови	10*
Вријеме рјешавања теста	90 минута

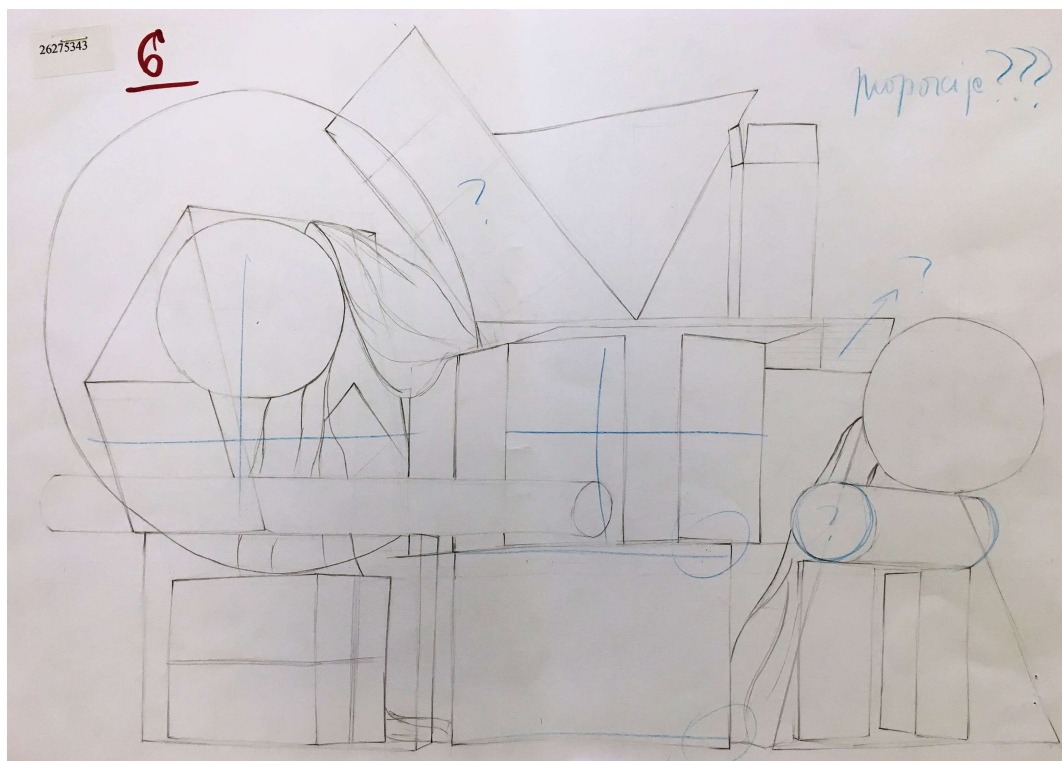
Циљ провјере знања је откривање способности и вјештина из области ликовних умјетности. Архитектура као наука се бави простором и захтијева од кандидата разумијевање феномена простора. Кроз овај задатак се открива способност сагледавања и преношења тродимензионалног у задати дводимензионални простор са принципима графичког представљања, односно цртежа као основног средства и елемента ликовног изражавања. Неопходне способности и вјештине кандидата се провјеравају кроз транспозицију више геометријских тијела од којих се формира композиција.

Начин бодовања и оцјењивања задатака

Позитивно рјешење овог задатка захтијева од кандидата развијене вјештине, осјећај за оријентацију у простору, осјећај за перспективу и перспективна скраћења, међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим, као и у односу са околином, уочавање тачних облика предмета и њихових пропорција, извора освјетљења и промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика. Неопходно је остварити јединство цртежа.

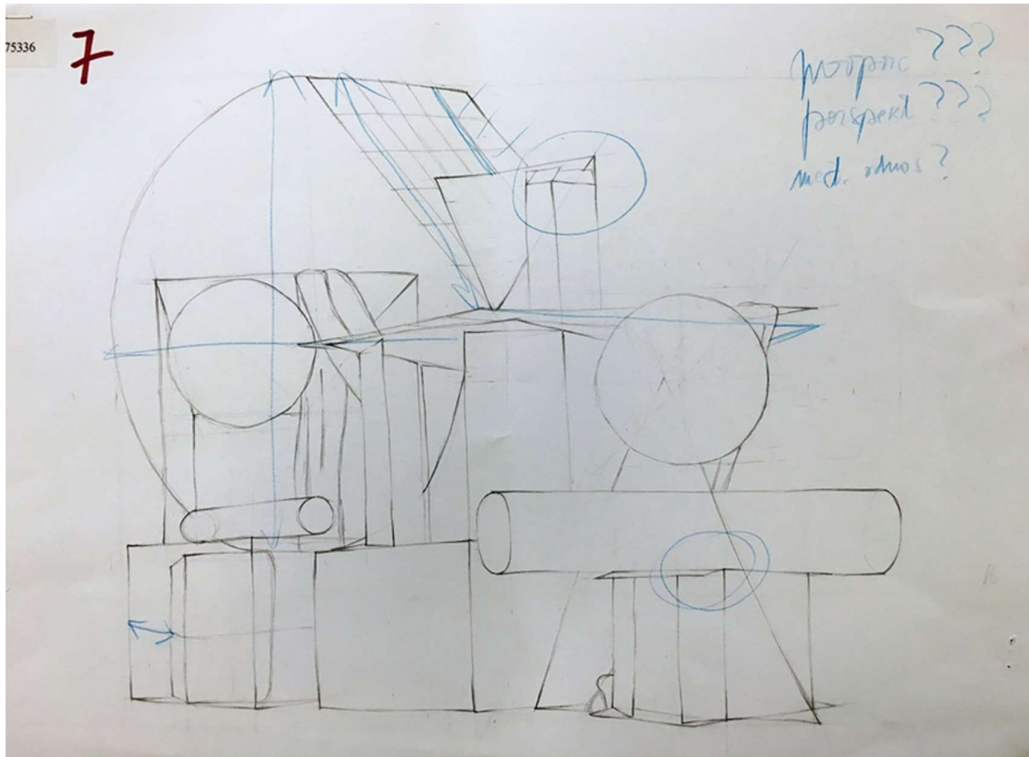
* До 2016. године, на пријемном испиту, Слободно цртање је носило укупно 15 бодова па је слједећих 5 радова представљених у Информатору оцијењено у скалду са тим бодовањем. Назначени су радови са пријемног одржаног 2016.

4.2.1 Примјери задатака са бодовима и објашњењима



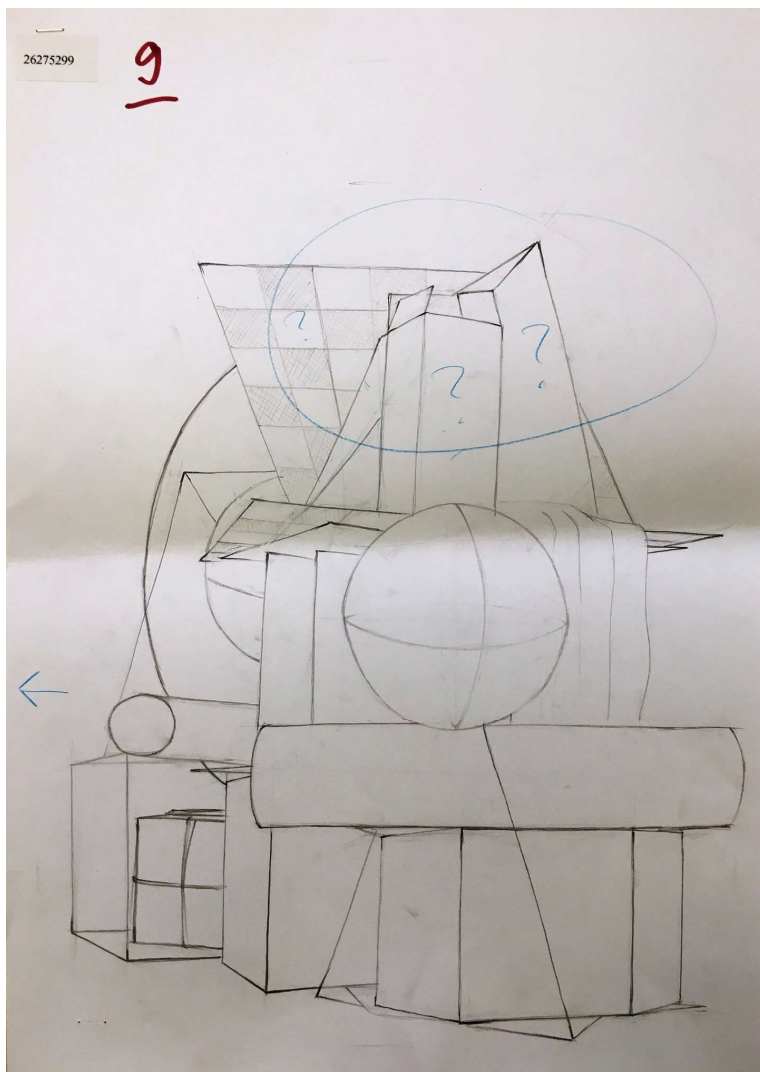
Рад је бодован са 6 бодова

Образложење: Није постигнуто јединство цртежа. Задатак није до краја ријешен. Присутне грешке које се односе на перспективу и пропорције, као и међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим. Поједини елементи на цртежу имају благу тенденцију да излазе из задатог простора. Нису у потпуности дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика. На одређеном броју елемената тачно је представљен облик и пропорција елемента, као и перспективно скраћење.



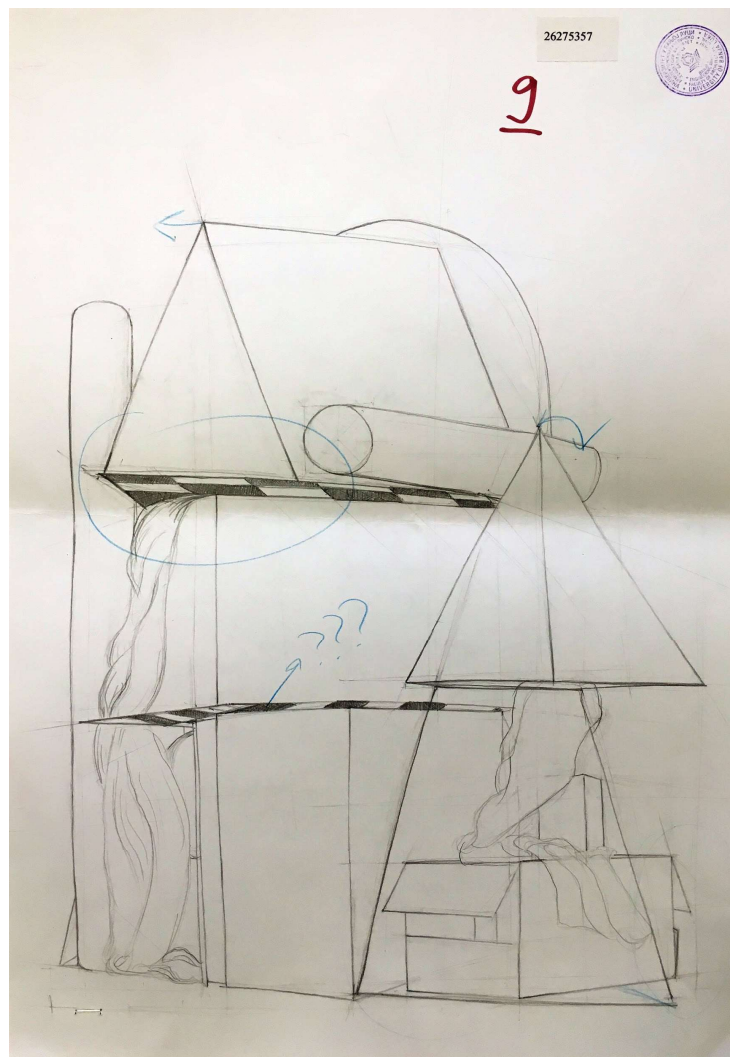
Рад је бодован са 7 бодова

Образложење: Није постигнуто јединство цртежа. Присутне грешке које се односе на перспективу и пропорције, као и међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим. Нису у потпуности дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика. На одређеном броју елемената тачно је представљен облик и пропорција елемента, као и перспективно скраћење.



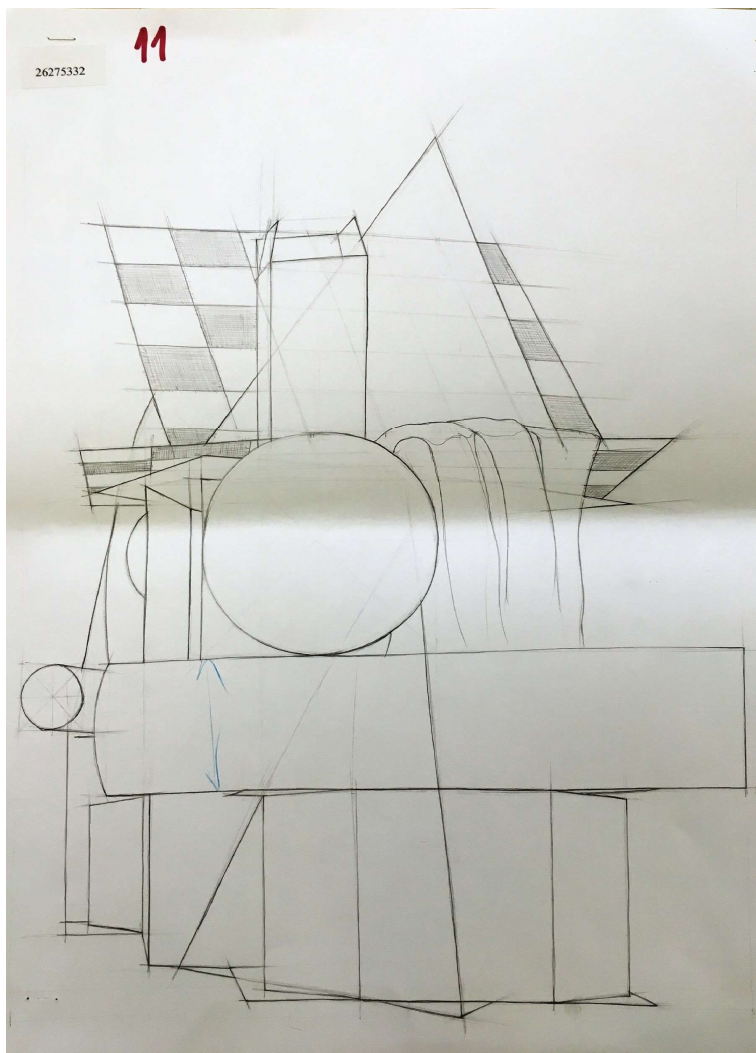
Рад је бодован са 9 бодова

Образложење: Присутне грешке које се односе на перспективу и међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим. Нису у потпуности дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика. Тачно су представљени облици и пропорције елемената, док су на одређеном броју елемената перспективна скраћења приказана тачно.



Рад је бодован са 9 бодова

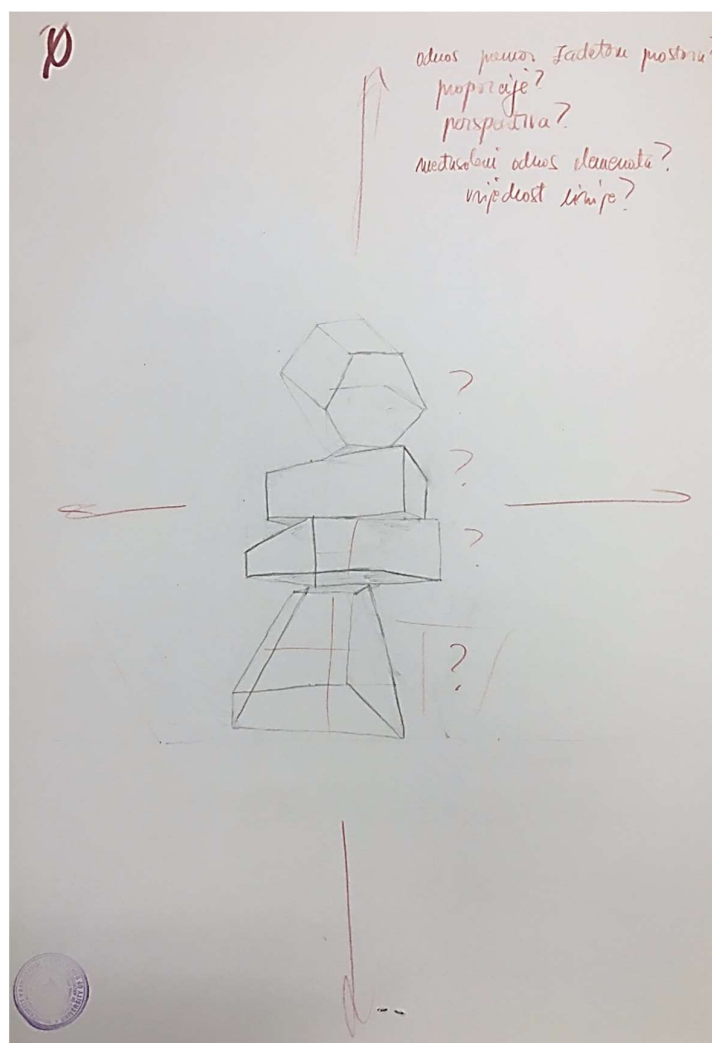
Образложење: Присутне грешке које се односе на перспективу и међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим. Нису у потпуности дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика. Тачно су представљени облици и пропорције елемената, док су на одређеном броју елемената перспективна скраћења приказана тачно.



Рад је бодован са 11 бодова

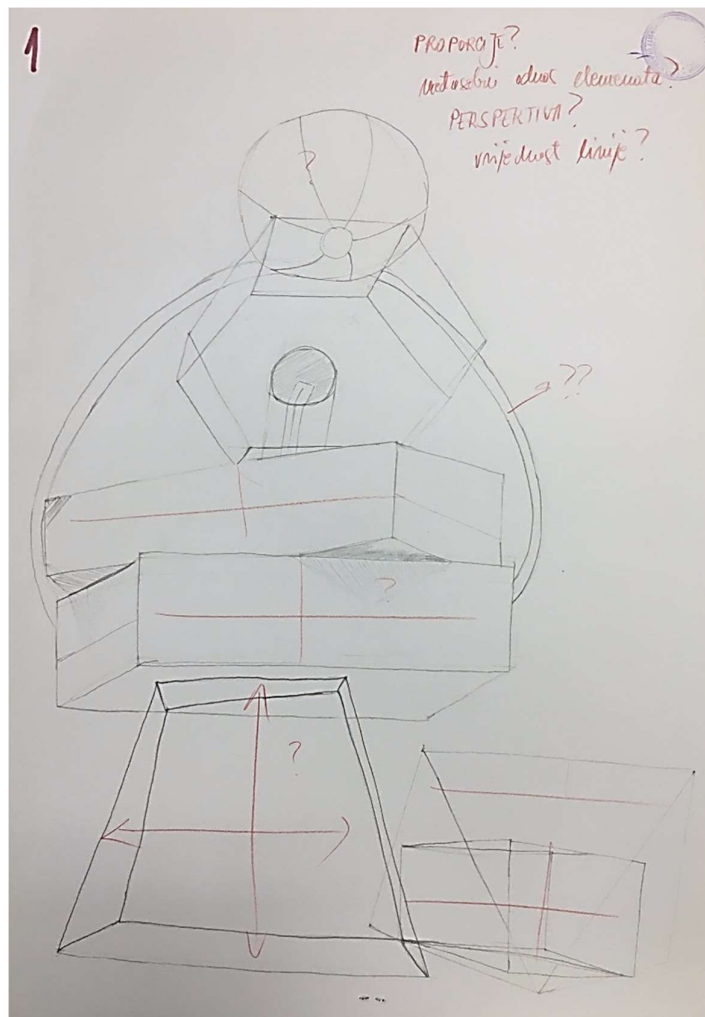
Образложење: Присутне грешке које се односе на пропорцију и у мањој мјери грешке које се односе на перспективна скраћења. Нису у потпуности дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика. Тачно су представљени облици и пропорције елемената, као и перспективна скраћења са мањим одступањима.

** Примјери радова са пријемног испита одржаног 2016.



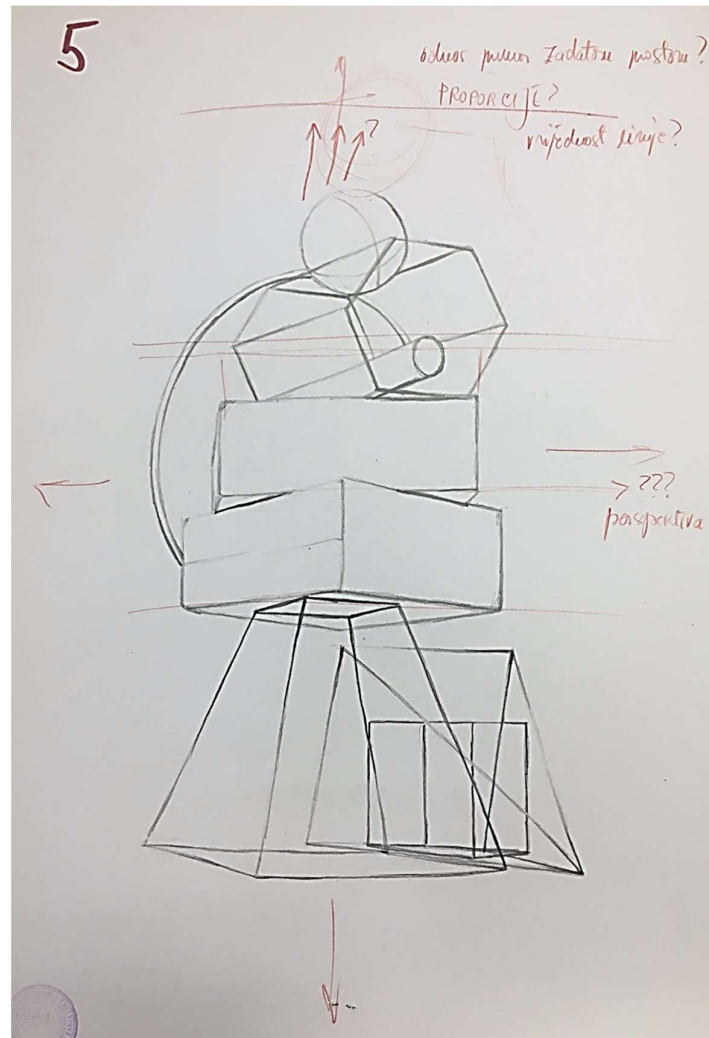
Рад је бодован са 0 бодова

Образложење: Није постигнуто јединство цртежа. Није поштован однос према задатом простору. Присутне значајне грешке које се односе на пропорције, перспективу и међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим. Нетачна корелација висине и ширине на појединачним елементима. Облици са израженим деформацијама. Нису представљени сви задати елементи. Нису дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика.



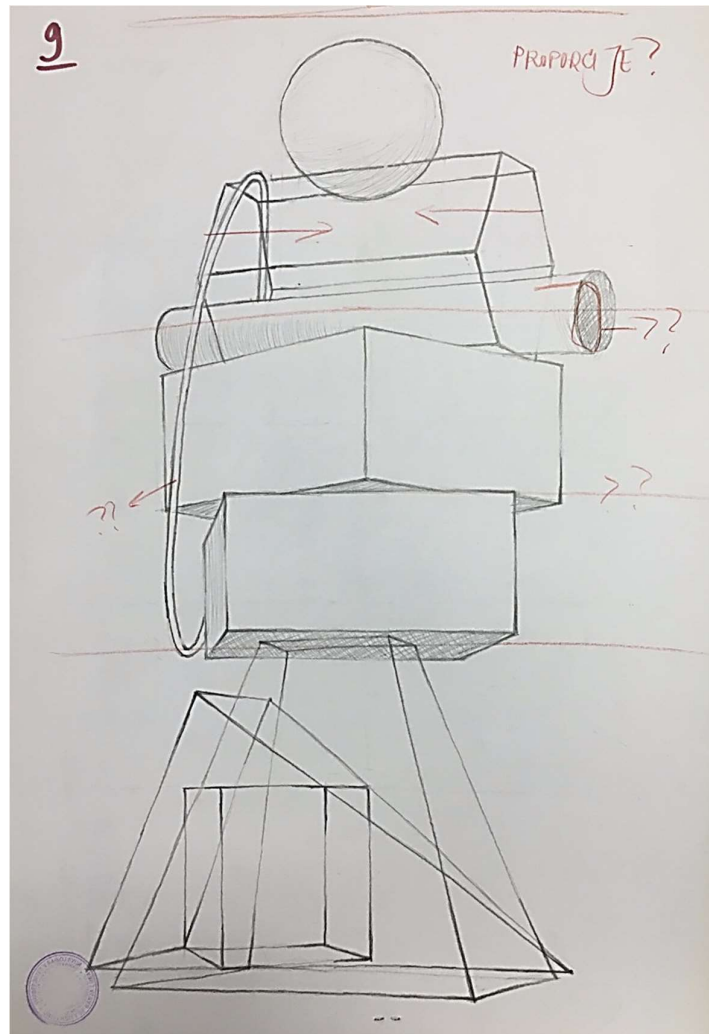
Рад је бодован са 1 бод

Образложење: Није постигнуто јединство цртежа. Присутне значајне грешке које се односе на пропорције, перспективу и међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим. Нетачна корелација висине и ширине на појединачним елементима. Присутне деформације облика. Нису дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика.



Рад је бодован са 5 бодова

Образложење: Није поштован у потпуности однос према задатом простору. Присутне грешке које се односе на пропорције, перспективу и међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим. Нису у потпуности дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика.



Рад је бодован са 9 бодова

Образложење: Присутна грешка које се односи на пропорцију и у мањој мјери грешке које се односе на перспективна скраћења. Нису у потпуности дефинисане промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика.

4.3 Тест опште информисаности

Бодови	10
Вријеме рјешавања теста	45 мин

Од кандидата се очекује да покаже посједовање знања о фундаменталним историјским догађајима, актуелним темама из друштва и околине, а нарочито о архитектури кроз историју: основни појмови и терминологија, значајни стилови, архитекте, пројекти и објекти.

Тест опште информисаности се спроводи кроз различите типове питања, како би се адекватно испитало познавање чињеница и разумијевање постављених задатака. Типови задатака који ће бити у квалификационом испиту су:

- питања са четири понуђена одговора, који могу бити писани или приказани кроз фотографије- кандидат заокружује један одговор
- директна питања - кандидат даје јединствен одговор на постављено питање
- питања на основу понуђеног текста (разумијевање и закључивање) - кандидат заокружује један од понуђених пет одговора на питања која се односе на текст
- препознавање фотографија - кандидат идентификује садржај фотографије и даје одговор на питање у вези исте, било кроз заокруживање једног од понуђених одговора - фотографија или на директно питање.

Литература која може помоћи у спремању за Тест опште информисаности су верификовани уџбеници за средњошколско образовање, који поред осталих, укључују и уџбенике за предмете Историја архитектуре, Историја уметности, те Ликовна култура. Поред овога препоручује се праћење актуелних дешавања у архитектури, друштву и околини.

Начин бодовања и оцјењивања задатака

Тест се састоји од 10 задатака и вријеме израде је 30 минута. Задаци могу бити различите комплексности у зависности од области знања које се испитује. Сваки тачан одговор се бодује једним бодом, при чему у случају понуђених одговора кандидат има право заокружити само један одговор да би рјешење могло бити разматрано. Код задатака који као резултат имају писани одговор, бодовање се само јасно и читко написана понуђена рјешења.

4.3.1 Примјери задатака са рјешењима

4.3.1.1 Питања са четири понуђена одговора који могу бити писани или приказани кроз фотографије-кандидат заокружује један одговор

Задатак 1 (1 бод)

Копти су:

- а) средњевјековни становници данашњег Копачког Рита
- б) валута у Пакистану
- в) копачи титанијума у Новом Мексику
- г) хришћани у Египту

Рјешење: г) хришћани у Египту

Задатак 2 (1 бод)

Допуни пар: Каин и...

- а) Клајд
- б) Авељ
- в) Дејл
- г) Клеопатра

Рјешење: б) Авељ

Задатак 3 (1 бод)

Врста често коришћена пропорција у архитектури је:

- а) архитектонска
- б) метричка
- в) обрнута
- г) златна

Рјешење: г) златна

Задатак 4 (1 бод)

Казањ је:

- а) главни град Казахстана
- б) посуда за спремање ракије у Шумадији
- в) град у Русији
- г) декоративни елемент на барокним зградама

Рјешење: в) град у Русији

Задатак 5 (1 бод)

Бановина којој је припадала Бања Лука за вријеме Краљевине Југославије је била:

- а) Посавска бановина
- б) Врбаска бановина

- в) Крајинска бановина
- г) Козарска бановина

Рјешење: б) Врбаска бановина

Задатак 6 (1 бод)

Који од наведених архитеката није лауреат Прицкерове награде:

- а) Christian de Portzamparc
- б) Glenn Murcutt
- в) Luis Barragán
- г) Hermann Bollé

Рјешење: г) Hermann Bollé

Задатак 7 (1 бод)

Који се од наведених градова простира на два континента?

- а) Јоханесбург
- б) Истанбул
- в) Мадрид
- г) Куала Лумпур

Рјешење: б) Истанбул

Задатак 8 (1 бод)

Када се одиграо пробој Сремског фронта?

- а) у току Првог свјетског рата
- б) у току Маричке битке
- в) у току Анексионе кризе
- г) у току Другог свјетског рата

Рјешење: г) у току Другог свјетског рата

Задатак 9 (1 бод)

Ко је од наведених књижевника написао роман „Сеобе“?

- а) Иво Андрић
- б) Милош Црњански
- в) Богдан Богдановић
- г) Иван Горан Ковачић

Рјешење: б) Милош Црњански

Задатак 10 (1 бод)

Која од наведених ријека протиче Европом?

- а) Јангцејанг
- б) Колорадо
- в) Рајна

г) Килиманџаро

Рјешење: в) Рајна

Задатак 11 (1 бод)

Када се одиграо пробој Солунског фронта?

- а) у току искрцавања у Нормандију
- б) у току најезде Хуна и Авара
- в) у току Првог свјетског рата
- г) у току Другог балканског рата

Рјешење: в) у току Првог свјетског рата

Задатак 12 (1 бод)

Ко је написао комедију „Народни посланик“?

- а) Добрица Ерић
- б) Бранислав Нушић
- в) Јован Дучић
- г) Лав Николајевич Толстој

Рјешење: б) Бранислав Нушић

Задатак 13 (1 бод)

На којем континенту се налази пустиња Гоби?

- а) Африка
- б) Азија
- в) Сјеверна Америка
- г) Европа

Рјешење: б) Азија

Задатак 14 (1 бод)

У којем граду је одржано Прво засједање АВНОЈ-а?

- а) Јајце
- б) Дрвар
- в) Сарајево
- г) Ужице

Рјешење: а) Јајце

Задатак 15 (1 бод)

Ко је написао роман „Коштана“?

- а) Стеван Сремац
- б) Драгослав Михаиловић
- в) Борисав Станковић
- г) Мирослав Крлежа

Рјешење: в) Борисав Станковић

Задатак 16 (1 бод)

Која од наведених ријека не припада Црноморском сливу?

- а) Дрина
- б) По
- в) Мура
- г) Драва

Рјешење: б) По

Задатак 17 (1 бод)

Када је одржан Берлински конгрес?

- а) од 13.06. до 13.07.1878. године
- б) након капитулације Трећег Рајха 09.05.1945. године
- в) након Битке за Берлин од 16.04. до 02.05.1945. године
- г) 1918. Године

Рјешење: а) од 13.06. до 13.07.1878. године

Задатак 18 (1 бод)

Ко је од наведених личности вајар?

- а) Иван Мештровић
- б) Иван Грозни
- в) Ивана Брлић Мажуранић
- г) Иван Горан Ковачић

Рјешење: а) Иван Мештровић

4.3.1.2 Директна питања - кандидат даје јединствен одговор

Задатак 1 (1 бод)

Која фондација има музеје у Њујорку, Билбау, Венецији и Абу Дабију?

Рјешење: Фондација Гугенхајм

Задатак 2 (1 бод)

За шта се додјељује награда Ага Кан (Aga Khan Award)?

Рјешење: Допринос исламској умјетности

Задатак 3 (1 бод)

Модел чиих лица су исклесани у планини Рашморе (Mt. Rushmore)

Рјешење: Предсједника САД-а

Задатак 4 (1 бод)

У којем граду се налазе Зимска палата и музеј Ермитаж?

Рјешење: Санкт Петербург (могућ одговор и Петроград или Лењинград)

Задатак 5 (1 бод)

Који је технички назив за графички приказ средње јачине и брзина вјетрова из појединих праваца.

Рјешење: Ружа вјетрова

Задатак 6 (1 бод)

У којој европској престоници се налази музеј Лувр?

Рјешење: Париз

Задатак 7 (1 бод)

Који град је домаћин Љетних олимпијских игара 2016. године?

Рјешење: Рио де Жанеиро

Задатак 8 (1 бод)

У којој европској престоници се налази Акропољ?

Рјешење: Атина

Задатак 9 (1 бод)

Који град у бишој Социјалистичкој Федеративној Републици Југославији је био домаћин Зимских олимпијских игара 1984. године?

Рјешење: Сарајево

Задатак 10 (1 бод)

Који је главни град Албаније?

Рјешење: Тирана

Задатак 11 (1 бод)

Ко је био први човјек у свемиру?

Рјешење: Јуриј Гагарин

Задатак 12 (1 бод)

Који морепловац је открио Америку?

Рјешење: Кристофор Колумбо

Задатак 13 (1 бод)

У оквиру које државе се налази Нови Мексико?

Рјешење: Сједињене Америчке Државе

4.3.1.3 Питања на основу понуђеног текста (разумијевање и закључивање) - кандидат заокружује један од понуђена четири одговора на питање које се односи на текст

Текст 1

Микеланђело је доживио дубоку старост, а његова гледишта су се непрестано развијала и мијењала, тако да је његове теорије немогуће посматрати као чврсту цјелину. Рођен 1475. године, учио је од мајстора који су и даље припадали кватроченту. Његова најранија римска остварења припадају пуном сјају високе ренесансе, али маниризам се чврсто утемељио још прије његове смрти 1564. Немогуће је подјелити његова дјела или идеје на оштро одјељене цјелине, али се могу подијелити на три периода, ако занемаримо врло ране године из којих не постоје документи.

У првом периоду Микеланђелово виђење умјетности у потпуности је гледиште хуманизма високе ренесансе. Оно се најјасније огледа на таваници Сикстинске капеле, Пијети у Св. Петру, и раним љубавним стиховима. Он је, као и Леонардо, био изданак научничке традиције фирентинског сликарства, али је на њега утицала и неоплатонистичка атмосфера у којој је стасавао. Његова највећа посвећеност, међутим, била је прије посвећеност љепоти него научној истини. Мада је током својих првих година осјећао да достизање љепоте у великој мјери зависи од познавања природе, он није осјећао да треба да предузме испитивање природних узрока самих по себи.

Постојао је још један чинилац који је Микеланђела истакао у први план у односу на Леонарда. Ни Фиренца ни Милано нису могли да пруже атмосферу свјежине која је једина могла да донесе велику синтезу попут оне која је постигнута у Фиренци почетком петнаестог вијека. У Риму је, са друге стране, Микеланђело пронашао град на врхунцу богатства и на водећој политичкој позицији у Италији. У тој атмосфери умјетник се осећао спокојно, у свијету који је могао мирно да посматра и који је могао непосредно да осликава у својим дјелима. Упознавање са неоплатонизмом довело га је до вјере у љепоту видљивог свијета, изнад свега у људску лепоту, која више није била обојена носталгичним мистицизмом Фиренце. Величанственост фигура на своду Сикстинске капеле не зависи само од простог подражавања природних облика, него од много чега другог, али њена идеализација се заснива на пажљивом познавању и студији ових форми. Без обзира на додати херојски елемент, темељ је обожавање људског тијела.

У Риму у доба високе ренесансе још увек су савршено била спојена два, у области филозофије очигледна конфликтна-система—хришћанство-и паганизам. Иконографска шема фресака

Сикстинске капеле заснована је на најученијој теологији, али је заодјевена у форме паганских богова.

Микеланђелова вјера у љепоту материјалног света била је огромна. Његови рани љубавни сонети одражавају ово осјећање у изражавању јаке емоционалне, а често и физичке страсти, усмјерене ка видљивој исто колико и духовној љепоти, о којој су говорили неоплатоничари. Штавише, Микеланђелови савременици нам говоре да он није само посматрао природу, већ ју је, током цијелог свог живота, и научно проучавао. Међутим, Микеланђело није вјеровао у нијемо подражавање природе. За њега умјетник до љепоте, која је изнад природне, стиже помоћу имагинције и по овоме он је неоплатоничар. За њега је лепота одраз божанског у материјалном свету.

Задатак 1 (1 бод)

Како је Микеланђело схватао љепоту?

- а) Као спој форме и садржине
- б) Као одраз уметникових емоција
- в) Као вјерно подражавање природе
- г) Као одраз божанског у свијету који нас окружује
- д) Као недостижну идеју

Рјешење: г)

Задатак 2 (1 бод)

Какву симбиозу је Микеланђело остварио на фрескама на своду Сикстинске капеле?

- а) Спој паганских вјеровања и уметникових осјећања
- б) Спој природних и људских форми
- в) Спој природних облика и паганизма
- г) Спој вјеровања у лијепу и узвишено
- д) Спој хришћанске теологије и љепоте античких богова

Рјешење: д)

Задатак 3 (1 бод)

Због чега је веома тешко Микеланђелове теорије посматрати као чврсту цјелину?

- а) Јер је живио у различитим градовима
- б) Јер су његови ставови доживљавали сталне промјене
- в) Јер су његове теорије расуте и некохерентне
- г) Јер је доживио дубоку старост
- д) Јер нема довољно података о његовим теоријама

Рјешење: б)

Задатак 4 (1 бод)

Шта је значајно за Микеланђелово стваралаштво?

- а) Вјеровање у већи значај духовне лепоте у односу на физичку
- б) Подједнако снажно изражавање страсних осјећања усмјерених ка физичкој и духовној љепоти
- в) Снажно веровање у љепоту божанских облика
- г) Изражавање носталгичног мистицизма
- д) Вјерно подражавање природе

Рјешење: б)

Задатак 5 (1 бод)

Да ли је Микеланђело веровао да уметник до љепоте стиже вјерним подражавањем природе?

- а) Јесте, јер је обожавао природну лепоту људског тијела
- б) Јесте, јер је по њему љепота заснована само на проучавању природе
- в) Јесте, јер је био посвећен научној истини
- г) Није, јер је вјеровао у снове
- д) Није, јер је сматрао да се љепота досеже помоћу стваралачке маште

Рјешење: д)

Текст 2

И врло често се код људи неугледне спољашњости јављају великодушност и искреност, здружене са племенитошћу у толикој мјери да се од таквих људи могу очекивати само дивна дјела; стога се они труде да своје тјелесне недостатке уљепшају врлином духа.

То се очигледно може видјети код Филипа, сина сер Брунелескија, који је био толико узвишена духа да се заиста може рећи да нам га је само небо послало да архитектури, већ вијековима на кривом путу, подари нови облик.

Била је то божја воља да Филипо остави свијету своју највећу, најузвишенију грађевину, љепшу од свих других рађених у ренесансно или античко доба.

Када су 1407. године старатељи Цркве санта Марија дел Фиоре и представници еснафа трговаца вуном позвали архитекте и инжењере Фиренце да би расправљали о начину засвођења куполе, био је присутан и Филипо, који је савјетовао да је потребно подићи грађевину изнад крова и да не треба градити по старом плану, него изградити фриз у висини од 15 лаката, а на средини сваке стране поставити по један велики прозор. На тај начин би се не само смањила тежина, него би се и купола могла лакше засводити.

Проблеми са изградњом и засвођавањем куполе нису били ријешени све до 1420. године када су се у Фиренци сакупили многи домаћи и страни мајстори. Брунелески је сматрао да купола мора да се засведе тако да полупречник лука одговара тричетвртини пречника основе и да се израде два свода, један унутрашњи, а други спољашњи, да би се између њих могло ходати; а да на угловима свих осам страна цијелу конструкцију спољашњег свода треба повезати ужљебљеним каменом. Исто треба урадити и са унутрашње стране ланцима од хростовине. Потребно је мислити на освјетљење, степенице и олуке којима би вода за вријеме кише могла отицати.

Међутим, овај његов приједлог није прихваћен. Одржан је нови састанак старатеља цркве и представника еснафа са архитектама, да се поново расправи о тој ствари. Тражили су да им Филипо изложи своју намеру у појединостима и да покаже свој модел, као што су и други градитељи урадили. Он на то није пристао, али је предложио страним и домаћим мајсторима да куполу ради онај ко буде успио да на равном мрамору усправи јаје; на тај начин ће показати снагу свог духа. Узевши јаје, сви мајстори су покушали да га усправе, али нико није успео да пронађе начин на који би то урадио. Када је речено Филипу да он покуша, он њежно узео јаје и, ударивши га доњим делом о мрамор, постави га усправно. Гунђали су уметници да би тако и они умјели да учине, али им је Филипо одговорио, смијући се, да би они и куполу умели засводити када би видели модел или цртеж.

И тако би одлучено да се њему повјери израда овог грађевинског дјела.

Задатак 1 (1 бод)

Да ли је Брунелески помогао изградњу куполе катедрале у Фиренци?

- а) Није, јер је сматрао да то није посао за њега
- б) Јесте, и предлагао је низ техничких и конструктивних рјешења
- в) Није, јер је био само добар говорник, а лош архитекта
- г) Јесте, јер је финансирао састанак инжењера у Фиренци

д) Није, јер није на вријеме израдио модел куполе

Рјешење: б)

Задатак 2 (1 бод)

Да ли је Брунелески ријешио проблем засвођавања куполе катедрале у Фиренци?

- а) Није, јер је било немогуће направити ланце од храстовине
- б) Није, јер статички прорачун није одговарао допуштеним напонима
- в) Јесте, јер је предложио иновативно двоструко засвођење
- г) Њега није занимала конструкција куполе, већ кровни покривач
- д) Он је желио да надмаши друге, интересовала га је само величина куполе

Рјешење: в)

Задатак 3 (1 бод)

Да ли је Брунелески био ангажован на пројекту засвођења куполе?

- а) Јесте, јер је уживао велики углед у Фиренци
- б) Није, јер није понудио добро рјешење
- в) Јесте, јер је добио инспирацију у мрамору
- г) Јесте, јер је надмудрио остале мајсторе поставком јајета на мрамор
- д) Није, јер црквене власти нису хтјеле финансирати његов пројекат

Рјешење: г)

Текст 3

Непоновљиви Ел Греко (1541–1614), пред чијим платнима милионима широм свијета застаје дах, није био изузетак од већине свјетских мајстора необичних животних прича и судбина. Ако су његов живот и дјело данас познати до најситнијих детаља, то није био случај у прошлости. Вео заборавља који је вијекovima неправедно прекривао дјело овог славног Крићанина морао је једном да спадне. То се десило почетком 20. вијека, када је 1902. приређена прва већа изложба његових дјела у мадридском музеју Прадо и када је 1911. чувени француски писац Морис Барес (1862–1923) објавио књигу „Ел Греко или тајна Толедо.“

Од тада Ел Греко постаје мит, његово сликарство откровење, а познаваоци и љубитељи умјетности нису скривали љубав и симпатије према сваком његовом дјелу. Зашто је тако морало да буде? Одговор се чини јаснији када се његове слике пореде са сликама његових савременика – Тицијана, Веласкеза, Тинторета и других – и кад се види колико је Ел Греко био посебан.

Рођен као Доменикос Теотокопулос, Ел Греко се још као младић отиснуо у свијет, понијевши у себи нешто од византијске мистике и старогрчког епоса. Врло рано је почео да слика иконе у византијском стилу, али како је у 16. веку Крит био у саставу Млетачке републике, одлучио је да настави да учи сликарство у Венецији, гдје су у то вријеме живјели и стварали велики мајстори, попут Тицијана и Тинторета. Таква одлука била је исправна, јер је боравак у њиховим атељеима у тој мјери утицао на Ел Грека, да је напредовао невјероватном брзином. Ту је и добио чувен надимак Ел Греко, што значи Грк или из Грчке.

По препоруци и уз помоћ чувеног минијатурист Јулија Кловића, који је према младом Грку имао заштитнички однос, са непуних тридесет година долази у Рим и ту проучава великане ренесансе, нарочито Микеланђела. Иако се прилично добро снашао у „вјечном граду“, јер је задобио симпатије моћног кардинала Александра Фарнезеа, неким необјашњивим слиједом догађаја сели се 1577. године у Шпанију, тачније у древни град Толедо, који ће му бити и крајње животно одредиште.

Овде налази најповољније услове за рад, многе поруџбине, ужива милост шпанског краља, стиче богатство и славу и, на крају, прихвата Шпанију као своју праву домовину. Не само што се потпуно

уклопио у нову средину и међу нове људе, него је постао угледни маестро и један од највећих сликара моћне Краљевине у којој, како се говорило, Сунце никада није залазило.

Задатак 1 (1 бод)

Да ли је Ел Греко одувијек био чувен сликар?

- а) Јесте, јер је његов пријатељ Морис Барес објављивао текстове о њему
- б) Јесте, јер су Тицијан и Веласкез имали позитивне ставове о његовим сликама
- в) Није, будући да је његово дјело било обавијено велом тајне до почетка 20. вијека
- г) Није, јер се није посветио промоцији и реклами
- д) Није, јер Млетачка република није имала добре односе са Толедом

Рјешење: в)

Задатак 2 (1 бод)

Да ли је Ел Греко напредовао као сликар у Венецији?

- а) Није, јер Тинторето није хтио да му ода тајне заната
- б) Јесте, јер су га Крићани тајно финансирали
- в) Он није хтио да буде сликар, већ кардинал
- г) Није, јер је чекао пресељење у Толедо
- д) Јесте, јер је боравак у атељеима великих мајстора оставио велики утицај на њега

Рјешење: д)

Задатак 3 (1 бод)

Да ли је Ел Греко имао успјеха у Шпанији?

- а) Јесте, јер у шпанској империји није залазило Сунце
- б) Јесте, јер је био једини сликар на двору
- в) Није, јер није прихватио Шпанију као свој дом
- г) Јесте, јер је тамо нашао повољне услове за рад и милост код шпанског краља
- д) Јесте, јер је уживао углед код кардинала Александра Фарнезеа

Рјешење: г)

4.3.1.4 Препознавање фотографија - кандидат идентификује садржај фотографије и даје одговор на питање у вези исте.

Задатак 1 (1 бод)

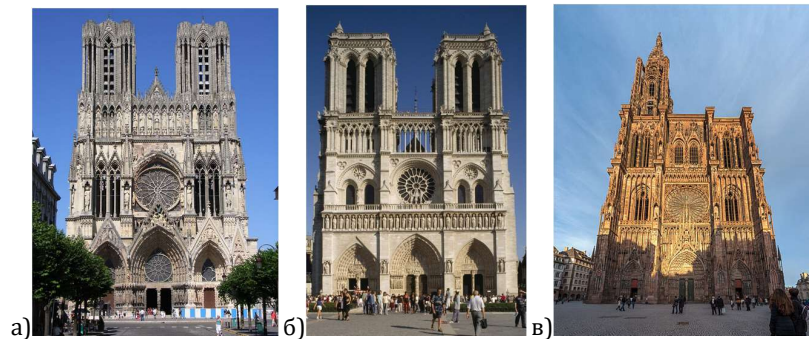
На којој од понуђених фотографија је приказан Партенон?



Рјешење: а)

Задатак 2 (1 бод)

На којој од понуђених фотографија је приказана катедрала Нотр Дам у Паризу?



Рјешење: б)

Задатак 3 (1 бод)

Који архитекта је приказан на фотографији?



Рјешење: Ле Корбизје (Le Corbusier)

Задатак 4 (1 бод)

Реконструкција којег свјетског чуда античког свијета је приказана на фотографији?



Рјешење: Артемидин храм у Ефесу

Задатак 5 (1 бод)

Сцена из којег филма је приказана на фотографији?



Рјешење: Планета мајмуна

Задатак 6 (1 бод)

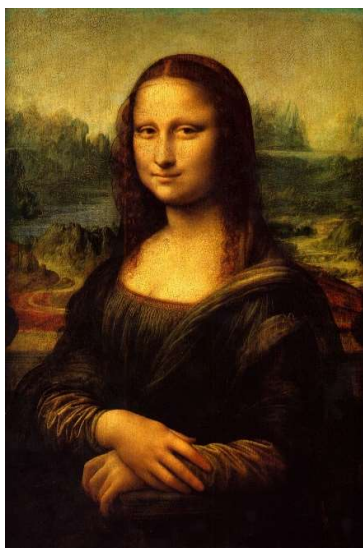
На којој од понуђених фотографија је приказана Кеопсова пирамида?



Рјешење: а)

Задатак 7 (1 бод)

Које дјело Леонарда да Винчија је приказано на слици?



Рјешење: Мона Лиза

Задатак 8 (1 бод)

На којој од понуђених фотографија је приказан Црвени трг?



Рјешење: б)

Задатак 9 (1 бод)

Које дјело Леонарда да Винчија је приказано на слици?



Рјешење: Тајна вечера

Задатак 10 (1 бод)

На којој од понуђених фотографија је приказана Бранденбуршка капија?



Рјешење: а)

Задатак 11 (1 бод)

Које дјело Огиста Родена је приказано на слици?



Рјешење: Мислилац

Задатак 12 (1 бод)

На којој од понуђених фотографија је приказан мост Голден гејт у Сан Франциску?



Рјешење: а)

Задатак 13 (1 бод)

Које дјело Микеланђела Буонаротија је приказано на слици?



Рјешење: Давид

4.4 Перцепција и презентација простора

Бодови	20
Вријеме рјешавања теста	90 мин

Од кандидата се уопштено очекује да покаже способност менталне манипулације тијелима у простору кроз уочавање и препознавање елемената пропорције, перспективе, паралелности и симетрије. Такође, од кандидата се очекује да покаже и разноликост и креативност при рјешавању просторних задатака, те вјештине цртања и презентације замишљеног на папиру. Такве компетенције испитиваће се кроз типове задатака који показују:

- способност замишљања и цртања тијела у простору из различитих погледа и у различитим просторним положајима
- способност замишљања и цртања пресека и међусобних продора тијела у простору
- способност визуелизације и приказа простора на основу описа
- способност оријентације у простору

Начин бодовања и оцјењивања задатака

Задаци могу бити различите комплексности за сваки сегмент испитивања способности. Број бодова које задатак носи наведени су поред текста задатка. Половина од свих задатака из ове области конципирана је у форми задатака са понуђеним одговорима. У овом начину оцјењивања, бодови ће се додјеливати само за потпуно тачан одговор (уколико постоји више рјешења, бодови ће се додјелити само ако су сви заокружени одговори тачни).

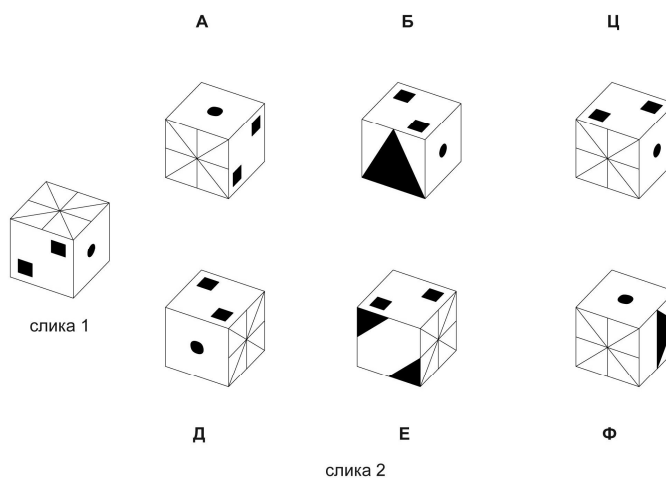
Код задатака код којих се од кандидата тражи да сами понуде рјешење, бодови ће се додјелити у складу са нивоом показаних способности које се од кандидата очекују.

4.4.1 Примјери задатака са рјешењима

4.4.1.1 Замишљање и цртање тијела у простору из различитих погледа и у различитим просторним положајима

Задатак 1 (2 бода)

На слици 1 приказана је коцка на чијим странама је нацртана мустра. На слици 2 су дате коцке са различитим мустрама и у различитим просторним положајима. На двије од ових слика се може налазити коцка са слике 1. Заокружити ознаку слика које одговарају коцки са слике 1.

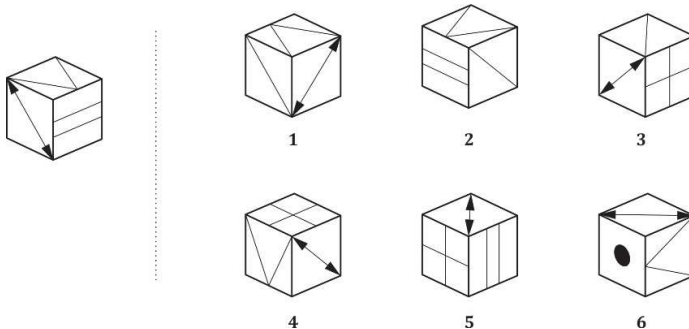


Рјешење: Тачна рјешења су А и Ф. Ф је могуће рјешење јер је назначено да су све мустре на странама различите. Два бода су додијељена само ако су оба тачна рјешења заокружена. Три или више заокружених рјешења подразумевају да задатак није тачан.

Задатак 2 (2 бода)

На слици лијево дат је изглед једне коцке. Све стране коцке имају различите симболе. На слици десно дата су два могућа рјешења дате коцке сагледане из другог угла. Заокружити број испод тачних рјешења.

**Заокружити само два одговора. Само оба тачно заокружена рјешења се бодују максималним бројем бодова.*

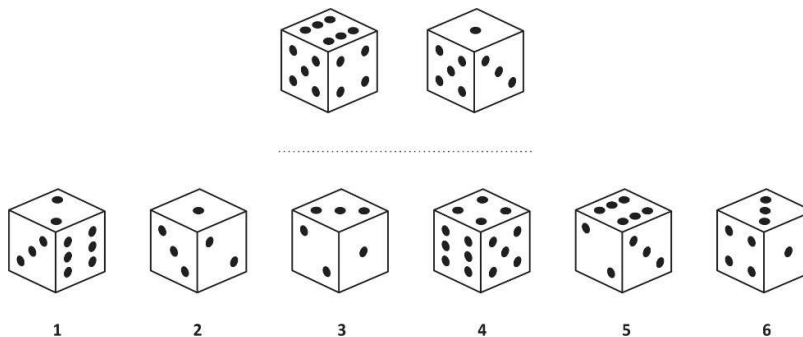


Рјешење: Тачна рјешења су 1 и 6. Два бода су додијељена само ако су оба тачна рјешења заокружена. Три или више заокружених рјешења подразумевају да задатак није тачан.

Задатак 3 (2 бода)

На слици горе дата су два изгледа једне коцке. Која два од датих рјешења на слици доле представљају изглед дате коцке сагледане из другог угла? Заокружити бројеве испод тачних рјешења.

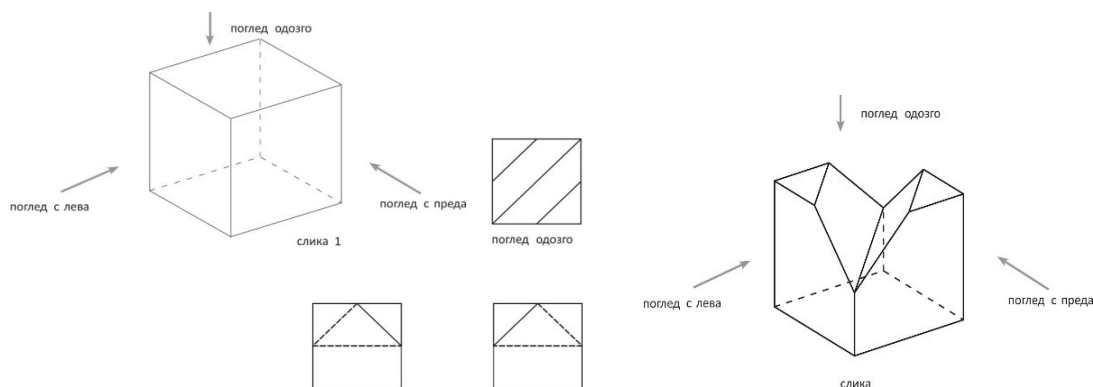
**Заокружити само два одговора. Само оба тачно заокружена рјешења се бодују максималним бројем бодова.*



Рјешење: Тачна рјешења су 2 и 5. Два бода су додијељена само ако су оба тачна рјешења заокружена. Три или више заокружених рјешења подразумевају да задатак није тачан.

Задатак 4 (4 бода)

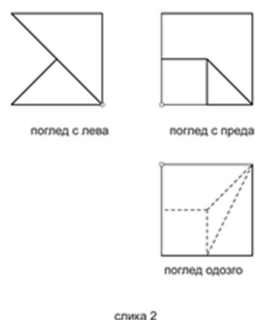
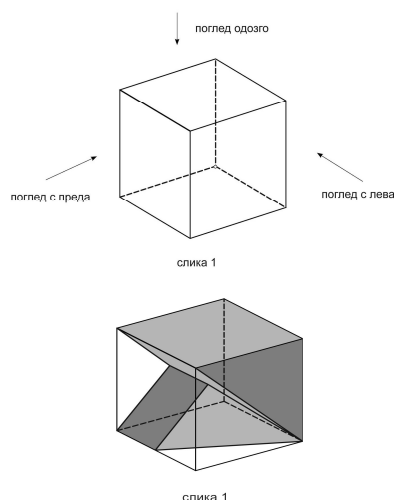
На слици десно дата су три изгледа једног објекта који је настао исјецањем коцке. На слици лијево, у оквиру дате коцке, треба нацртати просторни изглед овог објекта. Невидљиве ивице објекта нацртати непрекиданом линијом.



Рјешење: (десно) Тачно рјешење носи 4 бода. За дјелимично тачна рјешења бодови се додјељују у складу са нивоом показаног разумијевања геометрије објекта и броја тачно уцртаних ивица објекта.

Задатак 5 (4 бода)

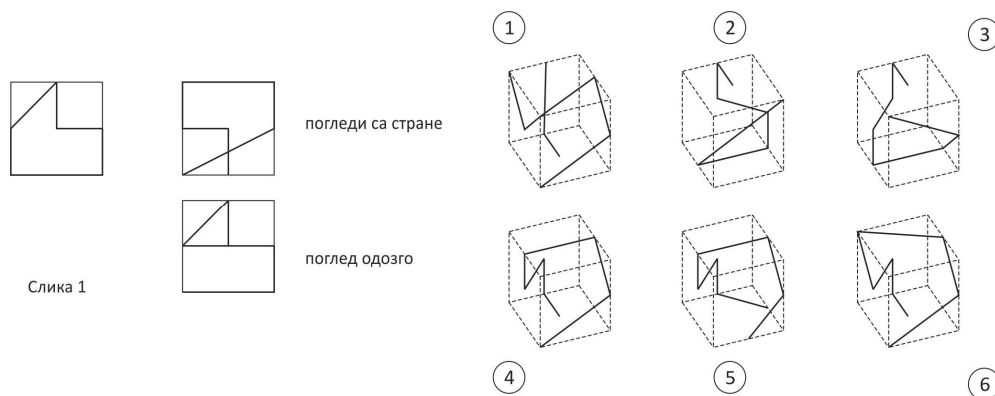
На слици 2, дати су изгледи једног објекта који је настао исјецањем коцке. На слици 1, у оквиру дате коцке треба нацртати просторни изглед овог објекта. Испрекиданим линијама уцртати невидљиве ивице тијела.



Рјешење: Тачно рјешење носи 4 бода. За дјелимично тачна рјешења бодови се додјељују у складу са нивоом показаног разумијевања геометрије објекта и броја тачно уцртаних ивица објекта.

Задатак 6 (2 бода)

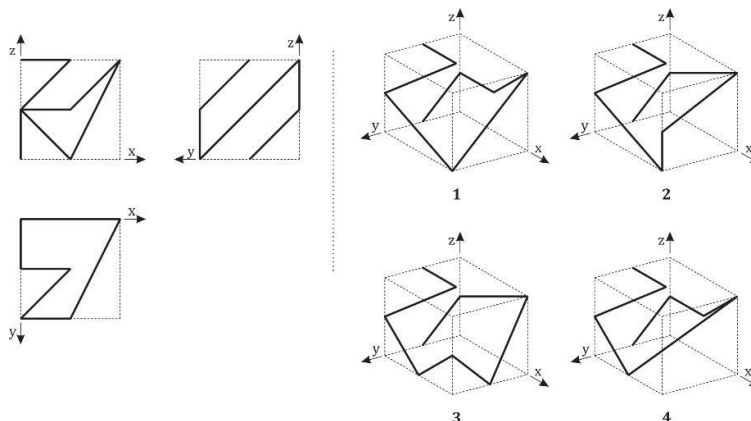
На слици 1 су дата три положаја савијене жице - поглед одозго и два погледа са стране. Означити прецртавањем редног броја, који се налази поред одговарајућег изгледа, који просторни модел одговара изгледима жице са слике 1.



Рјешење: Тачно рјешење је 4.

Задатак 7 (2 бода)

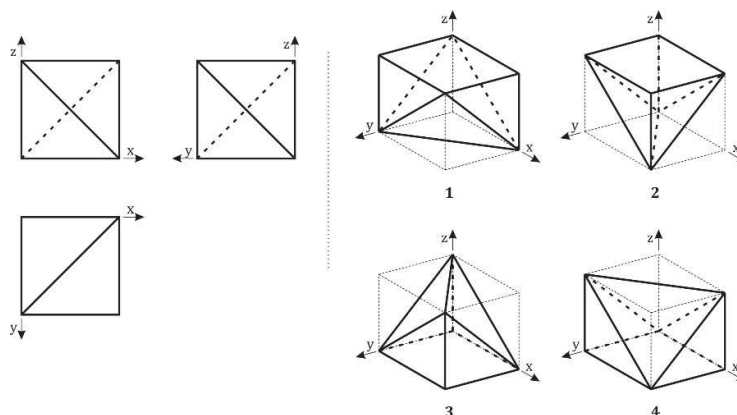
На слици лијево дата су три положаја савијене жице - поглед одозго и два погледа са стране. На слици десно заокружити број који одговара тачном просторном изгледу савијене жице.



Рјешење: Тачно рјешење је 4.

Задатак 8 (2 бода)

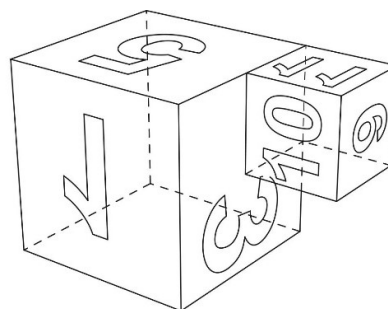
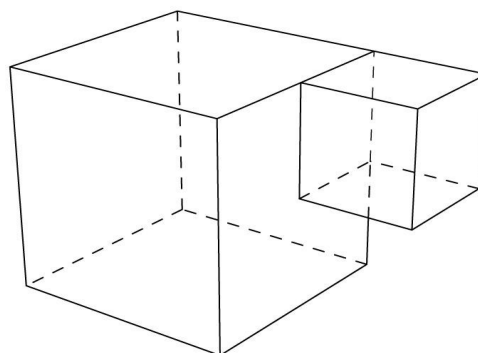
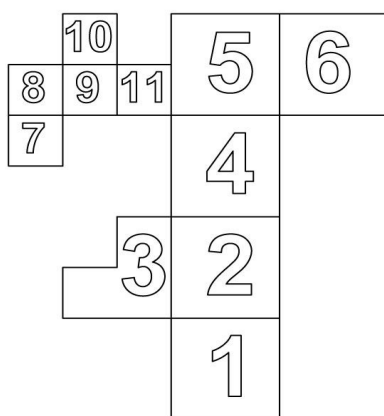
На слици лијево дата су три изгледа једног објекта који је настао исјецањем коцке - поглед одозго и два погледа са стране. На слици десно заокружити број који одговара тачном просторном изгледу тог објекта.



Рјешење: Тачно рјешење је 4.

Задатак 9 (3 бода)

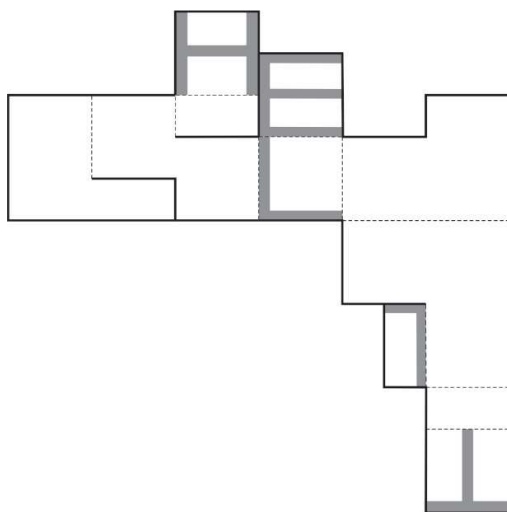
На слици лијево је дата мрежа објекта који је приказан на слици десно. На мрежи објекта су бројевима од 1-11 обележене пљошти објекта са слике 2. На слици 2, на видљивим странама објекта, дописати недостајајуће ознаке са мреже узимајући у обзир да се бројеви налазе на спољном омотачу објекта. Приликом уцртавања бројева узети у обзир положај и оријентацију слова са мреже.

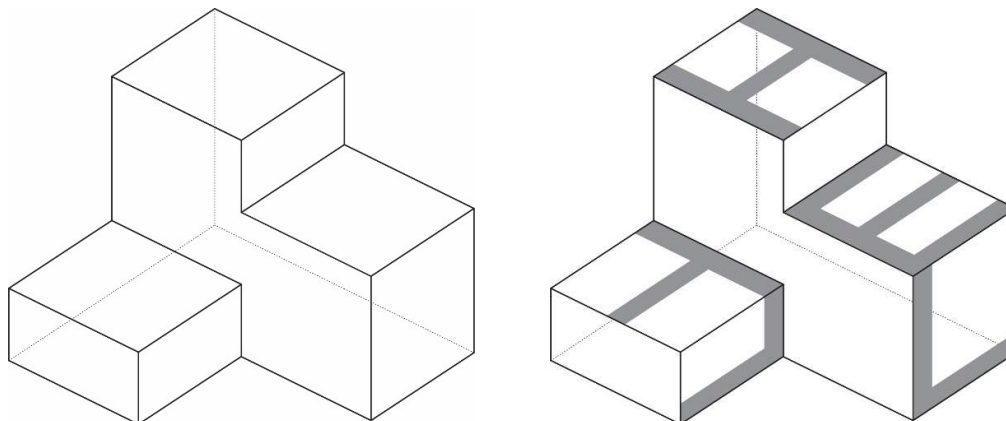


Решење: Свака тачно уцртана ознака укључујући и оријентацију ознаке бодује се са пола бода.

Задатак 10 (5 бодоваа)

На слици горе је дата мрежа објекта који је приказан на слици доле. Пуне линије представљају мјесто гдје се папаир сијече, а испрекидане гдје се папир савија. На мрежи објекта различитим словима обиљежене су пљошти објекта са доње слике. На слици доле на видљивим странама објекта, нацртати слова са мреже узимајући у обзир да се слова налазе на вањском омотачу објекта. Приликом уцртавања слова узети у обзир њихов положај и оријентацију.

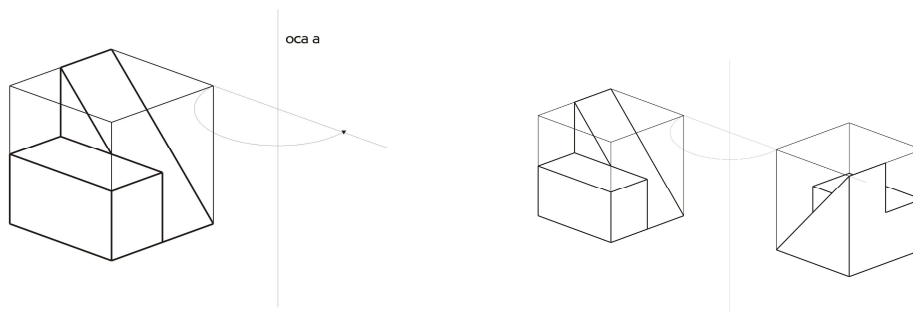




Рјешење: Свако тачно уцртано слово укључујући и оријентацију слова бодује се 1 бод.

Задатак 11 (2 бода)

На слици је дато тијело и оса а. Представити дато тијело у новом положају послје огледаљења око осе а. (огледаљење око осе а се може представити и као ротација објекта за угао од 180). Невидљиве ивице представити испрекиданим линијама.



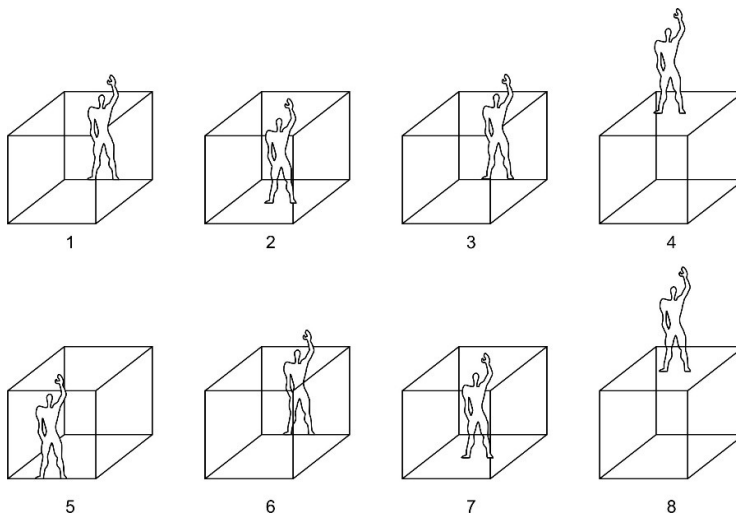
Рјешење: Тачно рјешење носи 2 бода. За дјелимично тачна рјешења бодови се додјељују у складу са нивоом показаног разумијевања геометрије објекта и броја тачно уцртаних ивица објекта.

Задатак 12 (4 бода)

Један човјек и једна коцка дати су у различитим међусобним односима. Човјек се креће по коцки и заузима разне положаје у простору, као сто је приказано на сликама 1-8.

За сваки опис човјековог положаја у односу на коцку, треба да одаберете једну или више одговарајућих слика. Своје одговоре заокружите у десној колони.

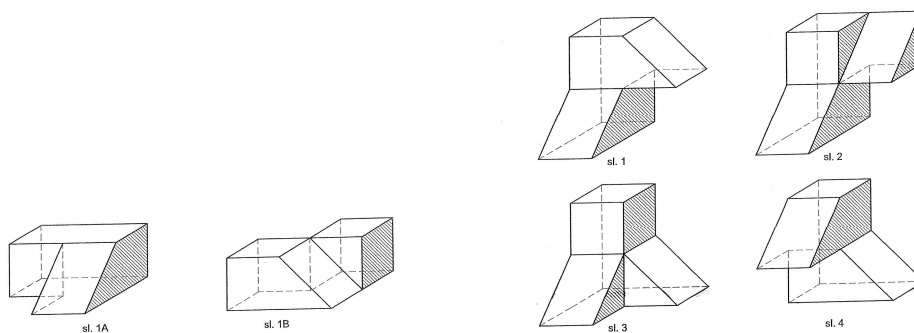
А Човјек стоји на коцки - поглед одозго	1	2	3	4	5	6	7	8
Б Човјек стоји на коцки - поглед одоздо	1	2	3	4	5	6	7	8
Ц Човјек стоји на средини коцке - поглед одозго	1	2	3	4	5	6	7	8
Д Човјек стоји на средини коцке - поглед одоздо	1	2	3	4	5	6	7	8
Е Човјек стоји на предњој ивици коцке - поглед одозго	1	2	3	4	5	6	7	8
Ф Човјек стоји на предњој ивици коцке - поглед одоздо	1	2	3	4	5	6	7	8
Г Човјек стоји на задњој ивици коцке - поглед одозго	1	2	3	4	5	6	7	8
Х Човјек стоји на задњој ивици коцке - поглед одоздо	1	2	3	4	5	6	7	8



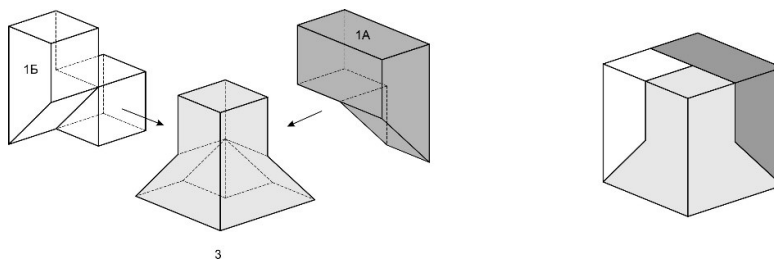
Рјешење: А (3), Б (8), Ц (2), Д (7), Е (5), Ф (1), Г (6), Х (4). Свако тачно рјешење носи пола бода.

Задатак 13 (2 бода)

Два дрвена тијела приказана на сликама 1А и 1Б граде са трећим тијелом цијелу коцку. На сликама 1, 2, 3 и 4 приказана су четири различита тијела. Само једно од ових тијела заједно са прва два тијела (слике 1А и 1Б) може да се склопи у пуну коцку. Заокружите број испод тачног рјешења.

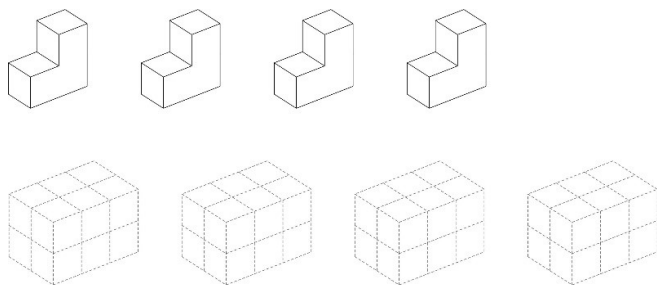


Рјешење: Слика 3

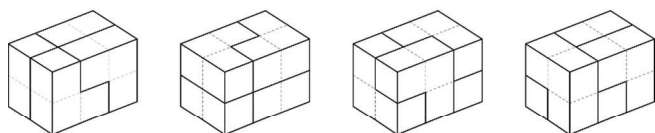


Задатак 14 (4 бода)

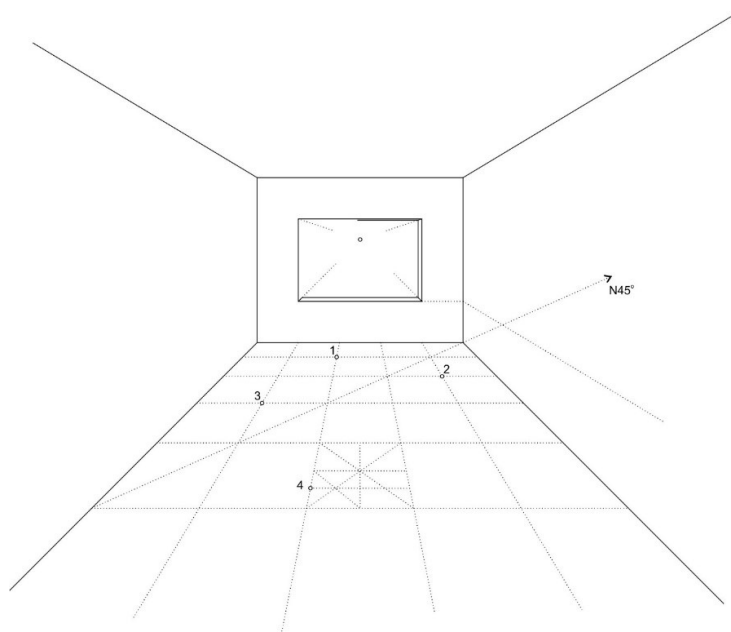
Дата су 4 идентична блока. Нацртати барем 4 могућа рјешења на који начин се ови блокови могу сложити у дати квадар. Уцртати видљиве линије.

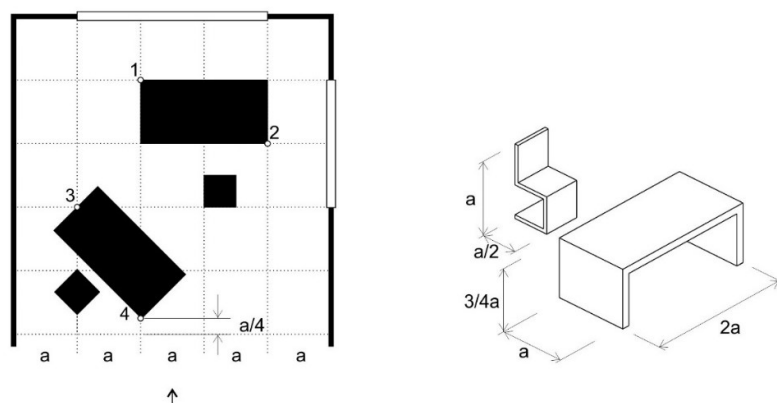


Рјешење: Постоји и више рјешења од понуђених. Свако тачно рјешење носи 1 бод.

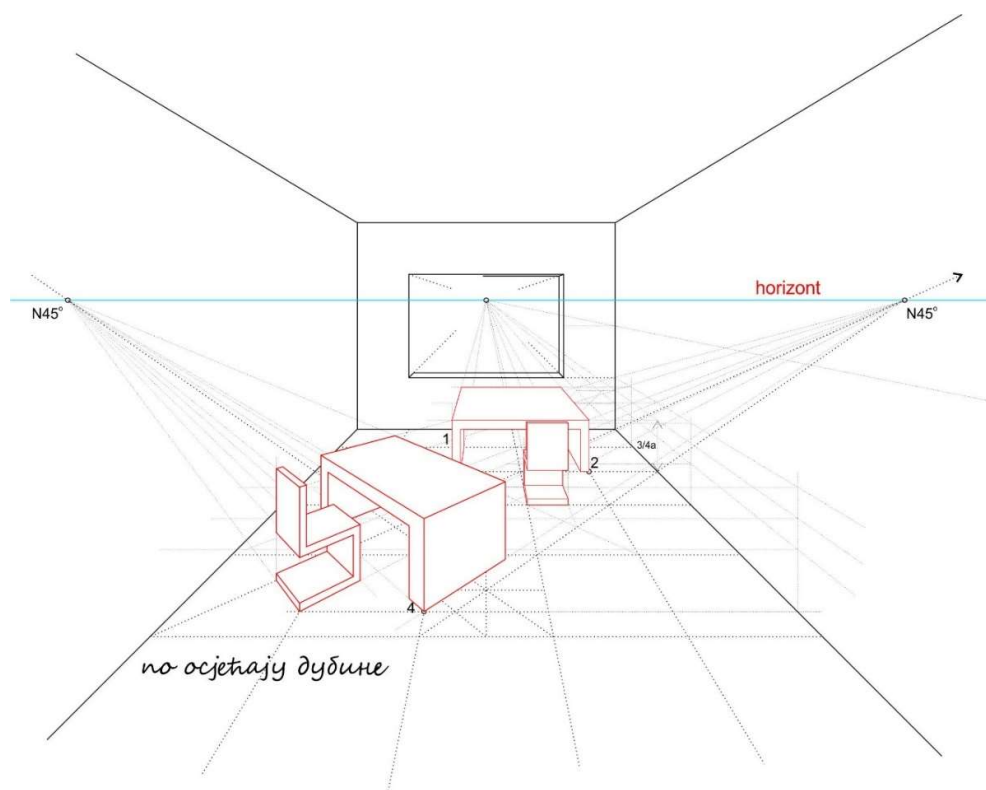
**Задатак 15** (5 бодова)

Дата је основа просторије и у њој уцртана диспозиција два стола о двије столице чије су мјере дате у скици са стране. Доцртајте на горњој скици просторије намјештај и прозоре задржавајући њихов распоред и пропорције.



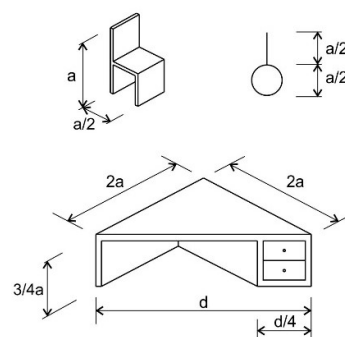
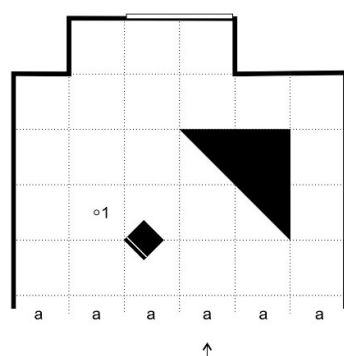
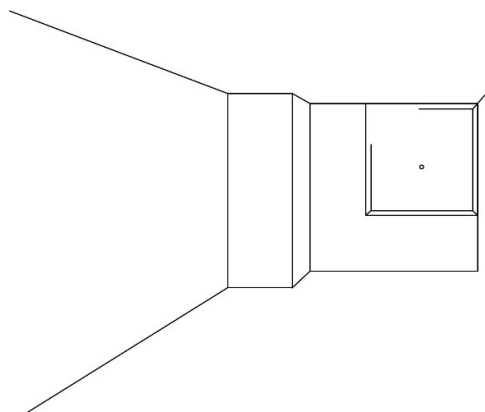


Рјешење: Помоћу недогледа за углове од 45 степени, могуће је направити ситнију подјелу задатог растера. Висине намјештаја могуће је наћи на фронталном зиду.

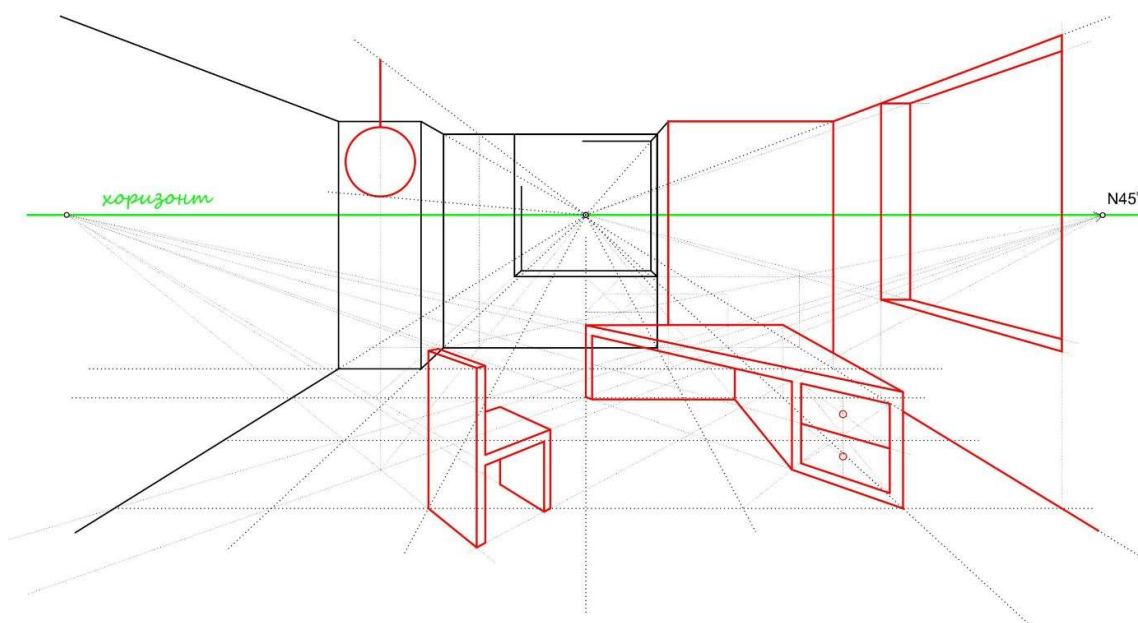


Задатак 16 (5 бодова)

Дата је основа просторије и у њој уцртана диспозиција стола, столице и лампе чије су мјере дате у скици са стране. Доцртајте на горњој скици просторије намјештај и прозоре задржавајући њихов распоред и пропорције. Лампа виси у тачки 1. Висина собе је 3а. Прозори су на једнаким висинама и истих димензија.



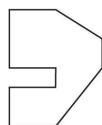
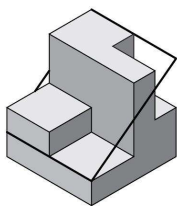
Рјешење: Помоћу недогледа за углове од 45 степени, могуће је направити ситнију подјелу задатог растера. Висине намјештаја могуће је наћи на фронталном зиду.



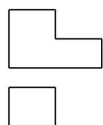
4.4.1.2 Замишљање и цртање пресека и међусобних продора тијела у простору

Задатак 1 (1 бод)

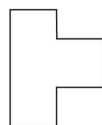
Задато је тијело пресјечено са равни, како је приказано на слици лијево. Који од понуђених рјешења десно приказује тачан пресјек? Заокружити број испод тачног рјешења.



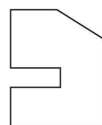
1



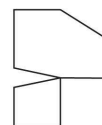
2



3



4

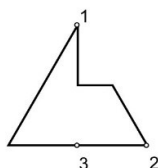
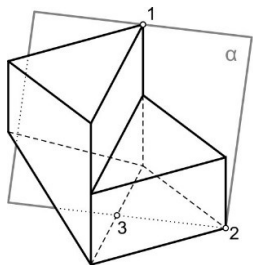


5

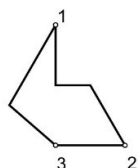
Рјешење: Тачно рјешење је 2

Задатак 2 (2 бода)

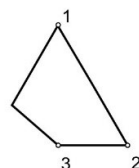
На слици лијево дато је тијело добијено исијецањем коцке. Тијело је пресјечено равни α . Тачке 1, 2 и 3 су заједничке тачке за тијело и раван. На слици десно заокружити слово испод рјешења које приказује пресјек ова два тијела.



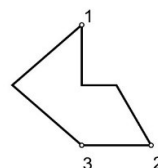
А



Б



В

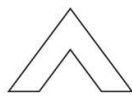
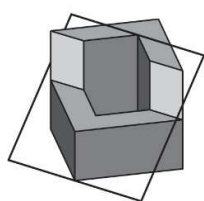


Г

Рјешење: Тачно рјешење је Б

Задатак 3 (2 бода)

Задато је тијело пресјечено са равни, како је приказано на слици лијево. Који од понуђених рјешења десно приказује тачан пресјек? Заокружити број испод тачног рјешења.



1



2



3



4

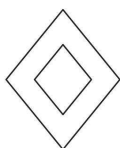
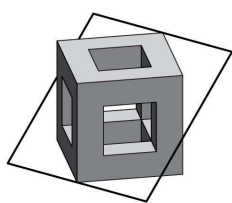


5

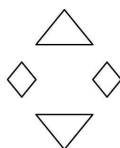
Рјешење: Тачно рјешење је 2

Задатак 4 (2 бода)

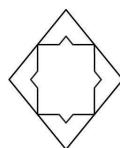
Задато је тијело пресјечено са равни, како је приказано на слици лијево. Који од понуђених рјешења десно приказује тачан пресјек? Заокружити број испод тачног рјешења.



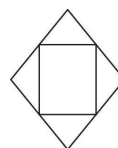
1



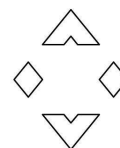
2



3



4



5

Рјешење: Тачно рјешење је 2

Задатак 3 (4 бода)

Дате су двије коцке које се међусобно продиру.

На слици 1 треба уцртати дио тијела који је заједнички за обе коцке.

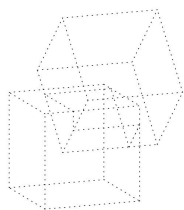
На слици 2 треба уцртати дио тијела који би настао уколико би се од доње коцке одузела горња коцка.

На слици 3 треба уцртати дио тијела који би настао уколико би се од горње коцке одузела доња коцка.

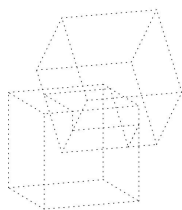
На слици 4 треба уцртати како би изгледало тијело уколико би се два тијела сјединила.

Приликом решавања узети у обзир да је доњој коцки горња површ видљива.

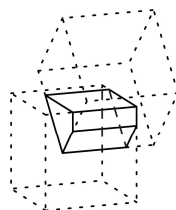
Испрекиданим линијама уцртати невидљиве ивице објекта.



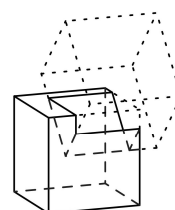
слика 1



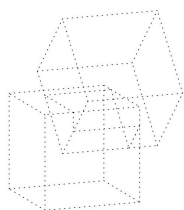
слика 2



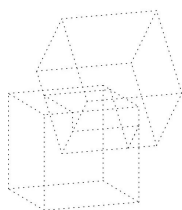
слика 3



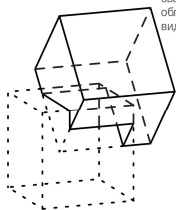
слика 4



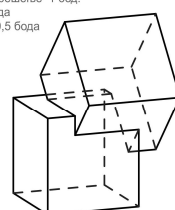
слика 5



слика 6



слика 7



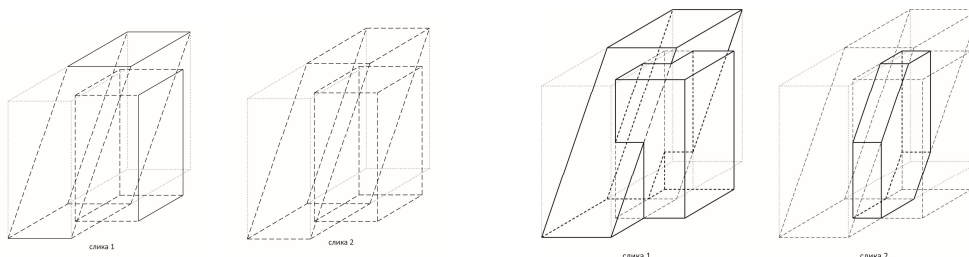
слика 8

Критеријуми:
свако тачно рјешење 1 бод;
облик 0,5 бода
видљивост 0,5 бода

Рјешење: (десно) Свако у потпуности тачно рјешење носи по 1 бод.

Задатак 4 (4 бода)

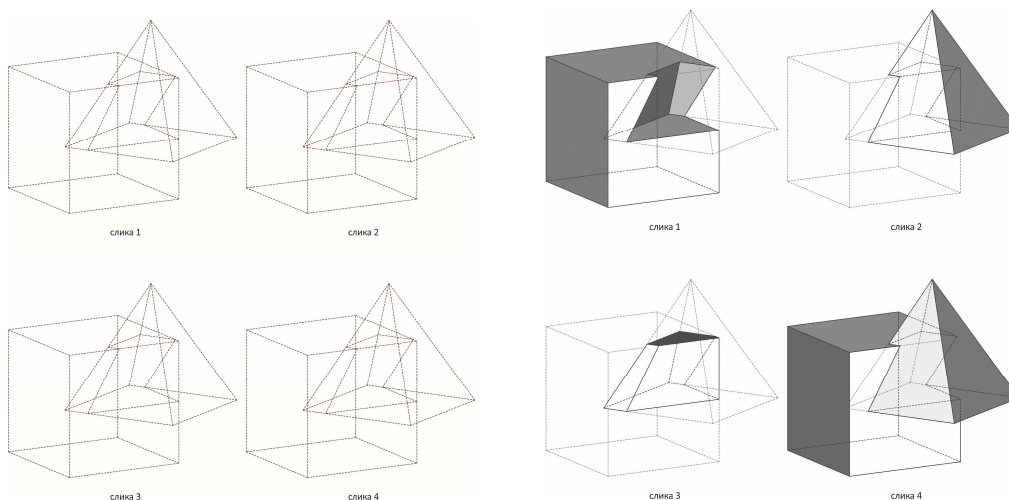
На слици су дата два рођаста тијела (коси и вертикални квадар) чије доње базе леже у истој равни. На слици 1 нацртати како би изгледала ова два тијела ако би се сјединила. На слици 2 нацртати дио тијела који је заједнички за оба квадра. Испрекиданим линијама нацртати невидљиве ивице.



Рјешење: (десно) Свако у потпуности тачно рјешење носи 2 бода.

Задатак 5 (4 бода)

На слици су дата два тијела (коцка и пирамида) која се међусобно продиру. На слици 1 уцртати како би изгледала ова два тијела ако би се сјединила. На слици 2 уцртати дио који је заједнички за оба тијела. На слици 3 уцртати дио тијела који настаје одузимањем пирамиде од коцке. На слици 4 уцртати дио тијела који настаје одузимањем коцке од пирамиде. Испрекиданим линијама нацртати невидљиве ивице.

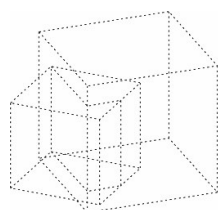


Рјешење: (десно) Свако у потпуности тачно рјешење носи 1 бод.

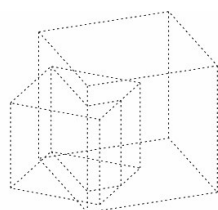
Задатак 6 (4 бода)

На слици су дата два тијела (већа и мања коцка) која се међусобно продиру. На слици 1 уцртати како би изгледала ова два тијела ако би се сјединила.

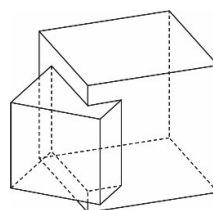
На слици 2 уцртати дио тијела који настаје одузимањем мање коцке од веће коцке.
 На слици 3 уцртати дио тијела који настаје одузимањем веће коцке од мање коцке.
 На слици 4 уцртати дио који је заједнички за оба тијела.
 Испрекиданим линијама нацртати невидљиве ивице тијела.



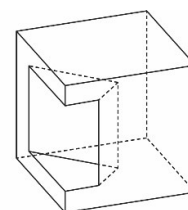
слика 1



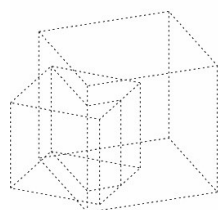
слика 2



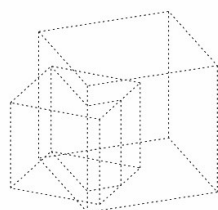
слика 1



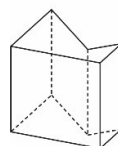
слика 2



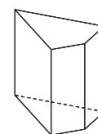
слика 3



слика 4



слика 3

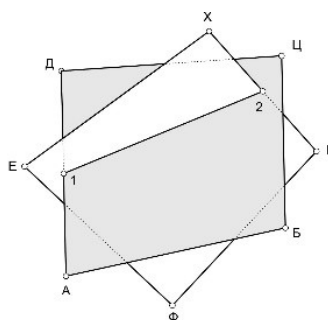
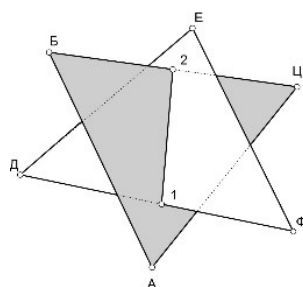
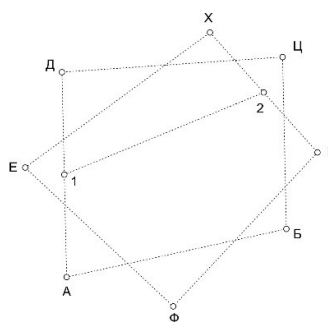
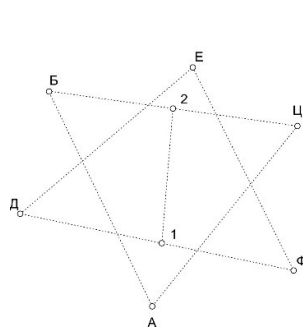


слика 4

Рјешење: (десно) Свако у потпуности тачно рјешење носи 1 бод.

Задатак 7 (2 бода)

Међусобни пресјек два картонска троугла и два четвороугла је дуж 12. У оба случаја ивица АБ је најближа оку посматрача. Одредити видљивост линија (задебљати видљиве линије).

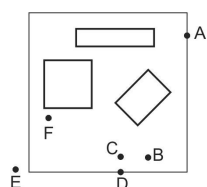


Рјешење: Свако у потпуности тачно рјешење носи 1 бод.

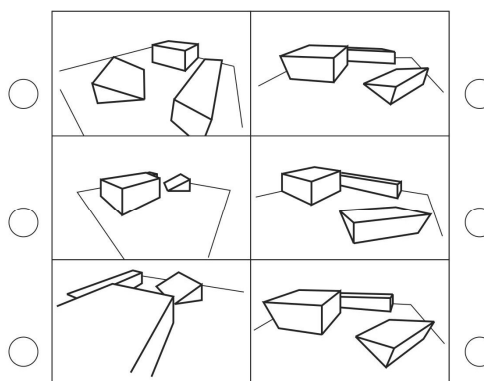
4.4.1.3 Оријентација у простору

Задатак 1 (3 бода)

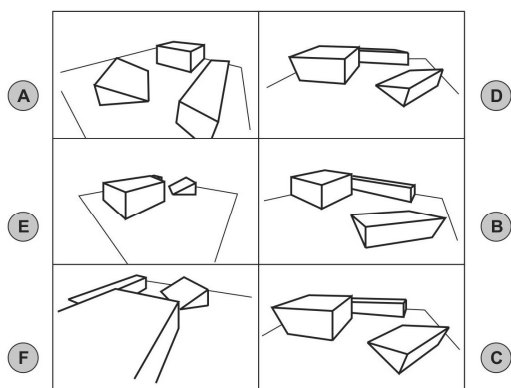
На слици 1 су словима ABCDEF дати положаји посматрача, који посматра дату просторну композицију. На слици 2, у кружићима уписати ознаке положаја посматрача, који одговара датој перспективној слици.



Слика 1



Слика 2

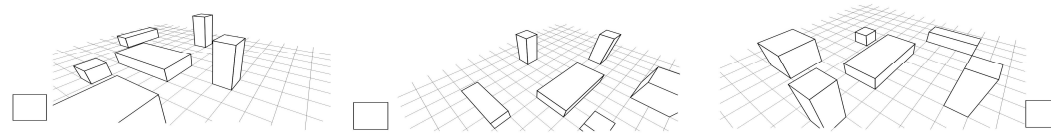
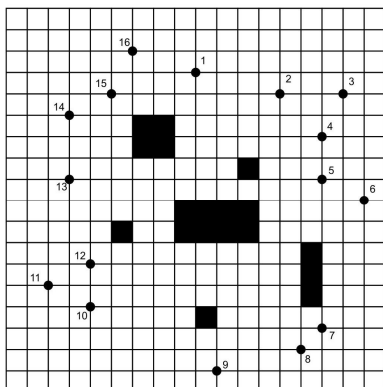


Слика 2

Рјешење: Свако тачно рјешење бодује се са 0.5 бода.

Задатак 2 (3 бода)

На слици горе, дат је изглед групе објекта и бројевима од 1-16 су означене позиције посматрача. У квадратићу поред перспективних слика треба уписати број позиције на којој стоји посматрач да би сагледао дату групацију објеката која је на перспективној слици.



Рјешење: Тачна рјешења су 14, 5 и 10 редосљедом с лијева на десно. Свако тачно рјешење бодује се са 1 бод.

4.4.1.4 Цртање по опису

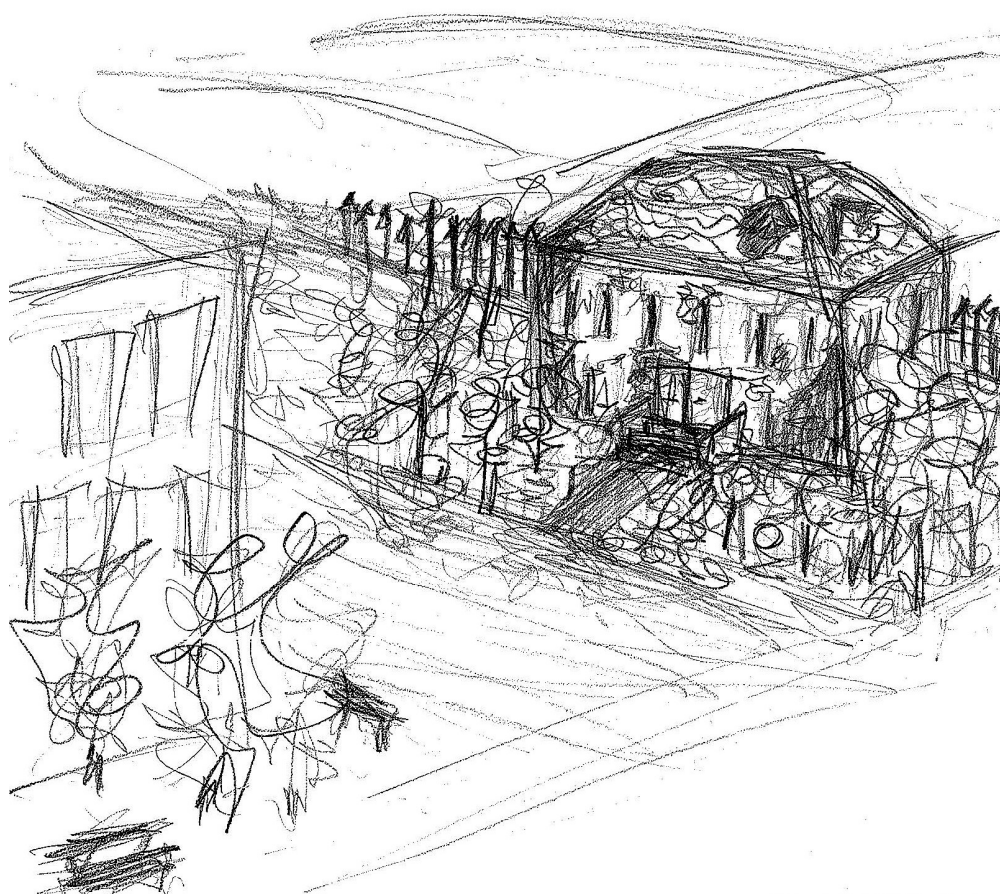
Задатак 1 (5 бода)

Дат је текст из романа Антона П. Чехова у коме је описана једна зграда и њено окружење. Испод текста кандидат треба да нацрта слику коју је замислио док је читао текст. Циљ овог задатка је да студент покаже способност имагинације простора који је описан и понуди своји графичку интерпретацију. Цртеж треба да буде на нивоу брзе скице графитном оловком, а битно је приказати описане елементе и дочарати атмосферу и емоцију коју слика носи. Машта је у овом задатку и више него пожељна! Предвиђено вријеме за рад је 15 мин..

У болничком дворишту стоји омања зграда, окружена целом шумом чичка, коприве и дивље конопље. Кров јој је зарђао, димњак се напола срушио, степенице на улазу су иструнуле и обрасле травом, а од малтера на зидовима остали су само трагови. Предњим прочељем та зграда гледа на болницу, а стражњим у поље, од ког је одваја стара болничка ограда, поврх које су чавли. Ти чавли окренути су шиљцима према горе, па ограда и ова зграда имају онај посебни, уклетни изглед, какав се код нас виђа само у болничким и казнионичким грађевинама.

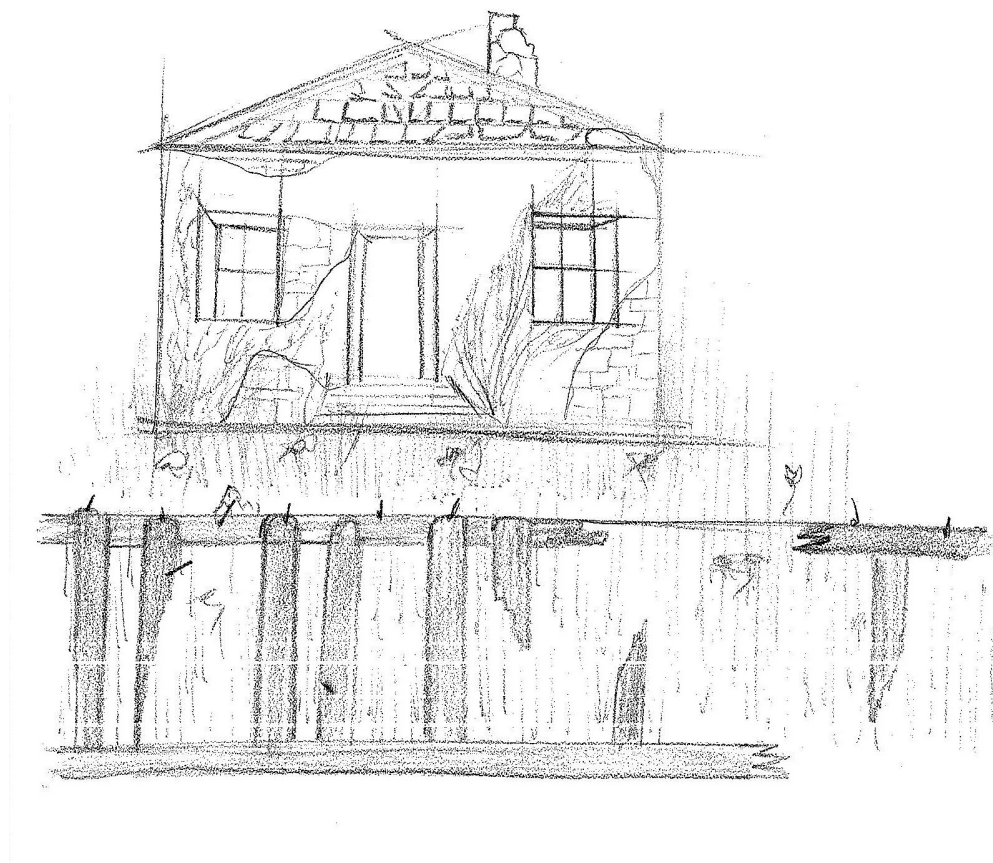
Антон П. Чехов, Павиљон бр. 6

Рјешења:



Рад је освојио 4 бода

Јасна представа просторног размјештаја објеката, као и наговјештај природе и поља у окружењу. Занимљиво изабран угао перспективе гдје се дијелом види болница и однос једног објекта према другом. Превише линија на цртежу са намјером да се прикаже запуштеност објекта ипак је више резултовала нејсношћу цртежа.



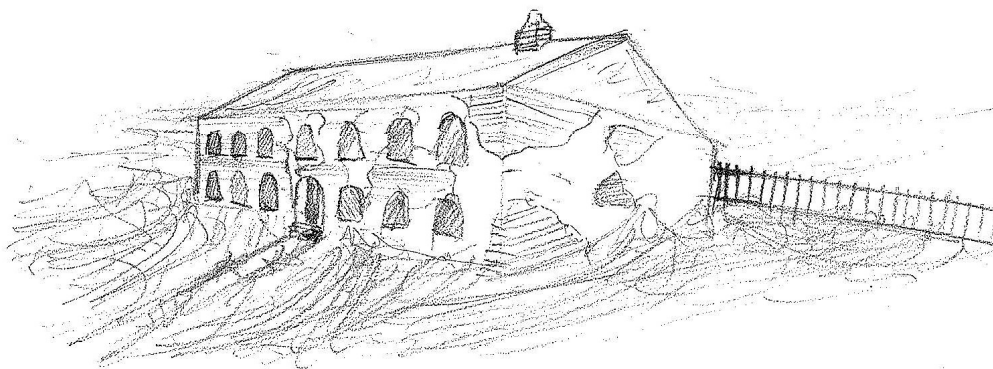
Рад је освојио 4 бода

Кандидат је најјасније приказао карактер различитих материјала у простору. Из цртежа се јасно чита запуштеност зграде али и оgrade која се издваја својом детаљношћу од цртежа осталих кандидата. Ипак, одабир централне перспективе ослабио је представу тродимензионалности простора.



Рад је освојио 3,5 бода

Успјешно представљени описани елементи. Инсистирањем на детаљима (као што је птица на крову објекта) настоји се нагласити атмосфера. Пропорција измедју зграде и оgrade логична а перспектива тачна са погрешним одабиром позиције посматрача.



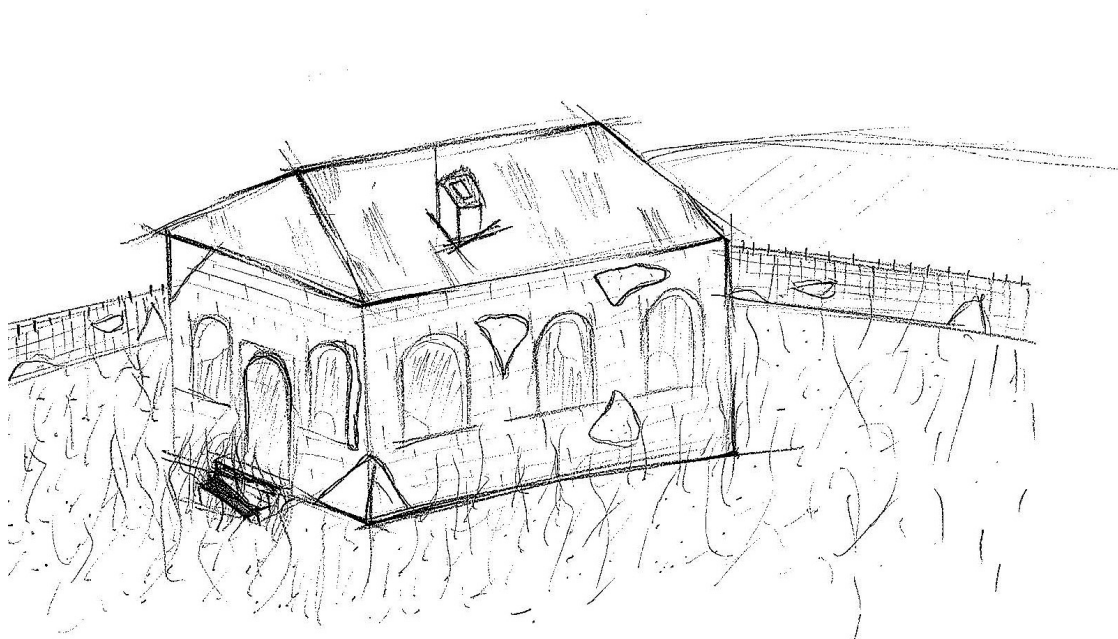
Рад је освојио 3,5 бода

Цртежом јесу представљени сви описани елементи (иако болница није представљена, имамо утисак да је зграда оријентисана према њој), али је перспектива у неким дијеловима нетачна. Зграда као да тоне својим задњим дијелом. Дobar одабир форме објекта, који заиста јесте зграда могућа у описаним условима. Правцем линија које ковитлају јасно је приказана запуштеност објекта и карактер материјала. Недостаје атмосфера уклетости.



Рад је освојио 2,5 бода

Цртеж има дубину иако је ограда нацртана у погрешној перспективи. Оронуло и запуштеност зграде су видни али недостаје изражајнији нагласак сабласности мјеста. Сва три елемента на цртежу представљена су једнако, те нема доминантног елемента.



Рад је освојио 2 бода

Аутор је јасно приказао зграду и пропорцијски добро поставио ограду. Лош одабир погледа и недостатак перспективе. Детаљи малтера на згради су пренаглашени, чак банални, па се не добија утисак запустелости или сабласности.

Задатак 2 (5 бодова)

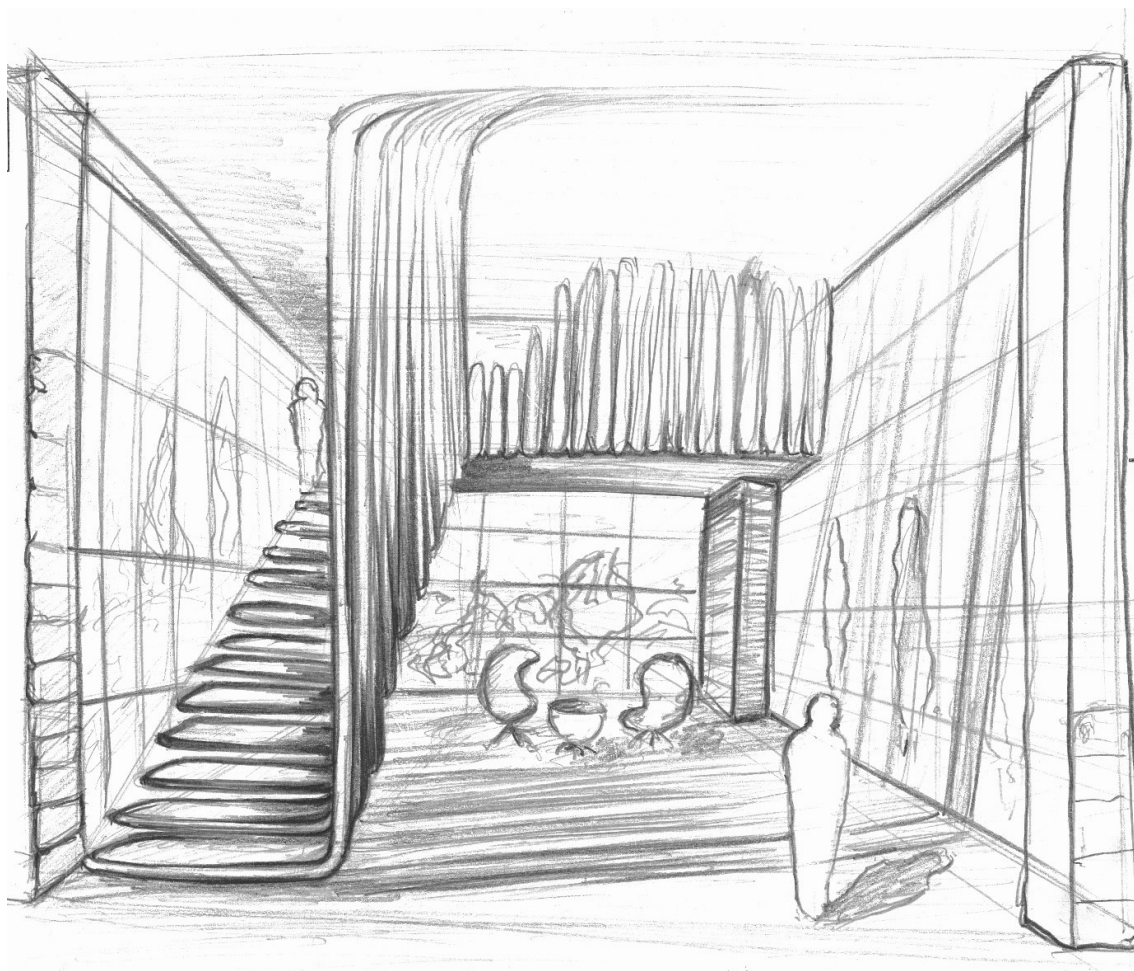
Дат је текст Зигфрида Гидиона (Sigfried Giedion) у коме је описан унутрашњи простор куће Маиреа. На следећем листу кандидат треба да нацрта простор који је замислио док је читао текст. Циљ овог задатка је да кандидат покаже способност имагинације простора који је описан и понуди своју графичку интерпретацију. Цртеж треба да буде на нивоу брзе перспективне скице графитном оловком, а битно је приказати описане елементе и дочарати атмосферу коју описани простор носи.

КУЋА МАИРЕА, АЛВАР АЛТО

У тренутку када се ступи на висину главног простора за дневни боравак, витки стубови неравномерно распоређени с обе стране дрвеног степеништа очаравају нас тиме што одвајају степенице од главног простора, а опет допуштају прожимање простора. Начин на који је степениште уклопљено у просторну организацију једне куће показује врло често и способност архитекте у савлађивању просторних односа. У овом случају протичу лаке дрвене степенице кроз главни простор, наговештавају постојање осталих просторија и упркос томе успевају да сачувају свој сопствени значај. Третиране су као провидна скулптура. У кући Маиреа остварено је нешто што се ретко постиже: осећај непрекинутог тока простора кроз целу кућу не губи се никада, а ипак је сачуван осећај интимности ма где се налазили.

„Простор, време и архитектура“, Зигфрид Гидион

Решења:



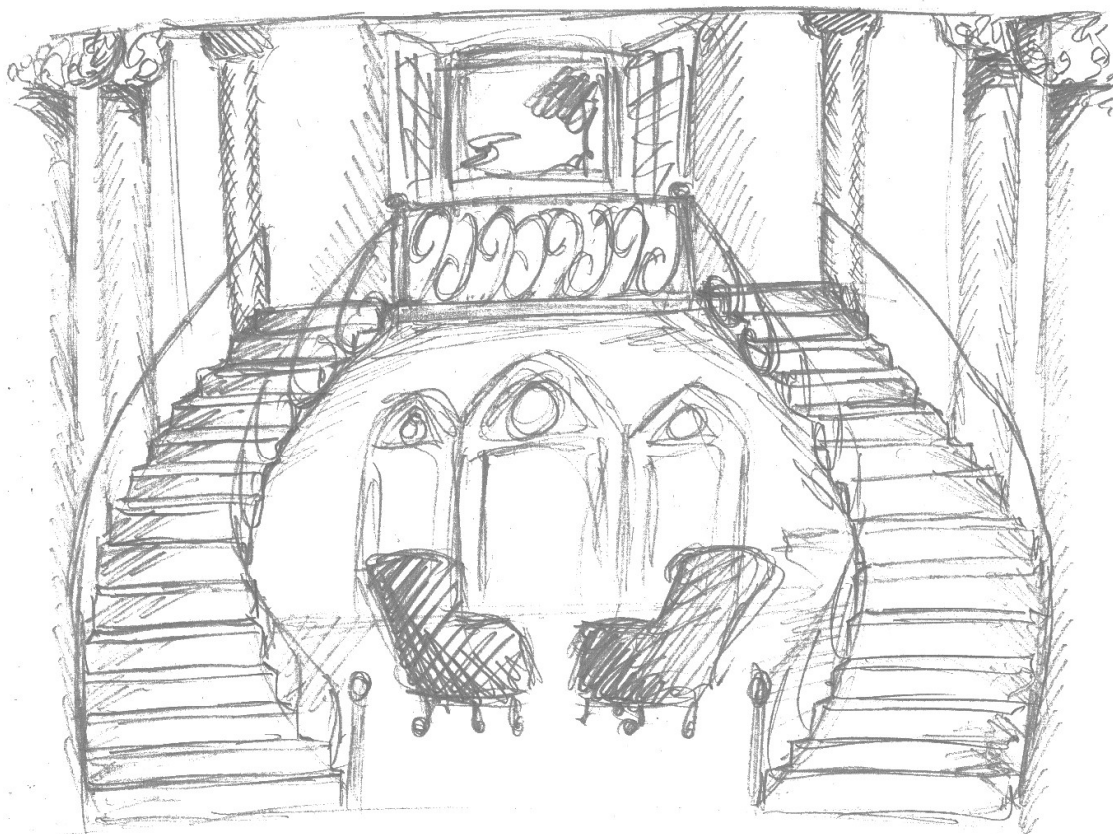
Рад је освојио 5 бодова

Начин на који су овдје приказани сви просторни елементи описани текстом веома је успјешан. Цјелокупан простор одаје утисак континуитета а степениште има описану лакоћу. Пропорција елемената је логична као и њихова просторна поставка. Перспектива је тачна а посебно добро се чита остварена дубина простора и природно окружење куће.



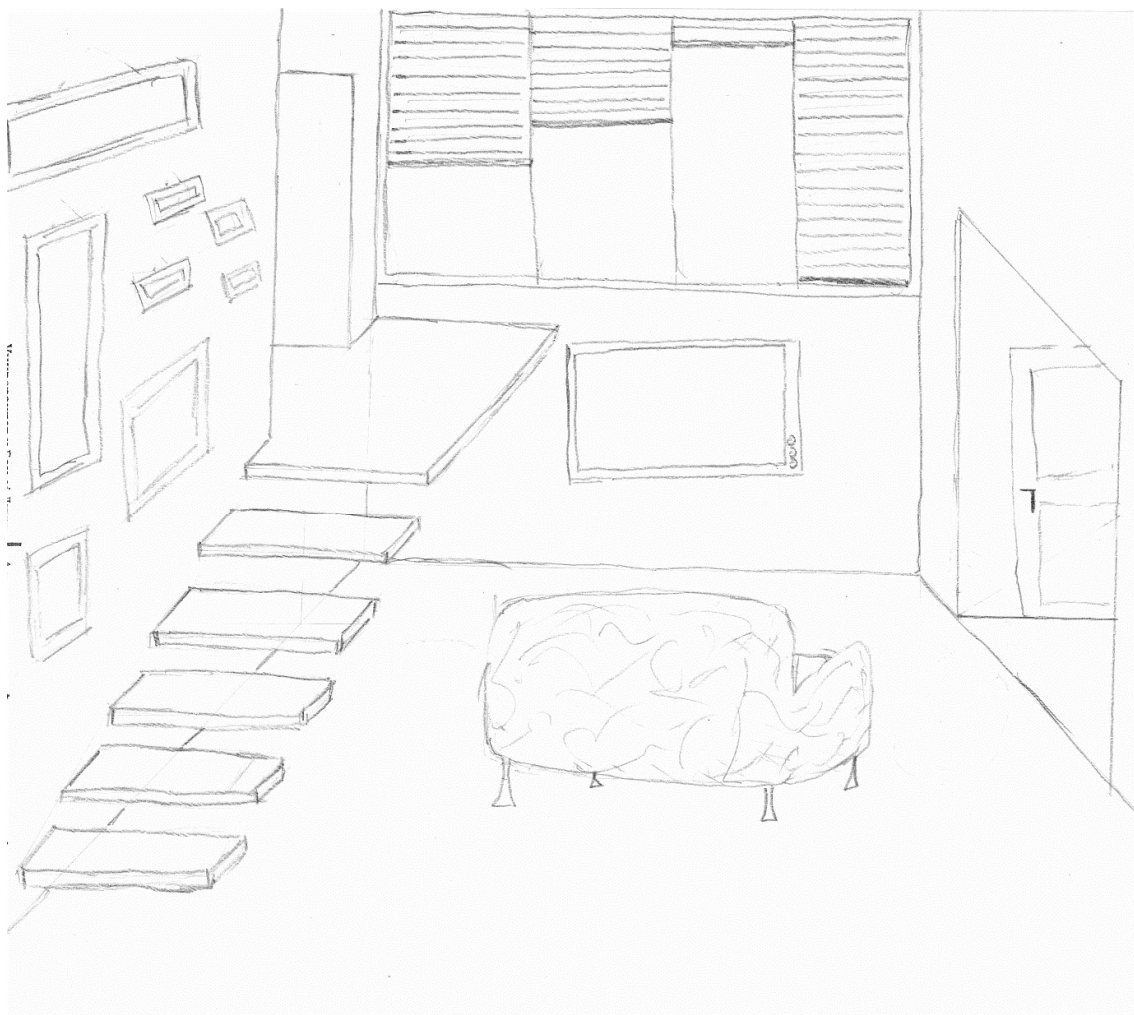
Рад је освојио 4,5 бода

Перспектива из висине очне тачке човјека даје цртежу увјерљивост. На цртежу се чита пријатна атмосфера дневног боравка приватне куће, што је постигнуто приказом великог броја детаља. Коректна је и пропорција између просторних елемената.



Рад је освојио 3,5 бода

Степениште и стубови који га одвајају од главног простора куће третиран су монументално. Недостаје им у тексту описана лакоћа. Изостао је наговјештај осталих просторија куће, иако је детаљност приказаних елемената задовољавајућа.



Рад је освојио 2 бода

Цртеж је више аксонометријски приказ простора него перспективни, који је захтијеван. Детаљи су занимљиви али им недостаје увјерљивости и просторности у самом приказу. Степенице имају описану лакоћу али су изостављени стубови. Цртежу недостаје дубина.

5. Садржај пријемног испита за СПГ и СПГД

5.1 Математика

Бодови	35
Вријеме рјешавања теста	120 мин

Од кандидата се очекује да покаже елементарно знање из математике, првенствено из области који су обрађиване у већини средњих школа. Тражено предзнање из математике је основ за даље праћење градива из математике и неких стручних предмета који се изучавају на студијском програму грађевинарство. Такође, способност логичког закључивања и размишљања је важно у образовању свих будућих инжењера грађевине.

Области које се полажу на квалификационом испиту:

- Полиноми и рационални алгебраски изрази
- Линеарне једначине и неједначине
- Проблеми који се свде на рјешавање линеарних једначина
- Размјера и пропорција
- Степеновање и корјеновање
- Квадратна функција, квадратне једначине и неједначине.
- Ирационалне једначине.
- Експоненцијална функција,
- Експоненцијалне једначине и неједначине.
- Основна правила логаритмовања, логаритамске једначине и неједначине.
- Тригонометрија правоуглог троугла, основне тригонометријске идентичности. тригонометријске функције, тригонометријске једначине и неједначине,
- Планиметрија (троугао, квадрат, паралелограм, ромб, правоугаоник, трапез).
- Стереометрија (призма, паралелопипед, коцка, пирамида, купа, ваљак).
- Сличност троуглова.
- Једначине праве и кружнице и њихови графици.

Литература: Вене I, II, III и књиге за први, други и трећи разред средњег усмјереног образовања.

Начин бодовања и оцјењивања задатака

На тесту се даје 7 задатака из наведених области. Сваки задатак носи по 5 бода. Бодују се и половично или дјелимично урађени задаци.

5.1.1 Примјери задатака са рјешењима

5.1.1.1 Полиноми и рационални алгебарски изрази

1. Одредити реалан број a тако да полином $P(x) = 2ax^3 - 4x^2 + ax - 2a$

а) буде дјелив са $x-2$ б) да остатак буде -8 .

2. Раставити на факторе полиноме:

а) $a^3 - 27b^3$ б) $a^6 - 64b^6$ в) $2a^3 - 8a^2 - 10a$

3. Упростити израз:

$$\left(\frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x} \right) : \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right)$$

4. Скратити разломак:

$$\frac{a^2 + 10a + 25}{a^2 + 3a - 10}$$

5. Скратити разломак:

$$\frac{a^4 + 1 - 2a^2}{1 - a - a^2 + a^3}$$

6. Упростити израз:

$$\left(\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a}{1 - a^2} - \frac{2}{a + 1} \right) : \frac{4a^2 - 1}{a^3 - a^2 - a + 1}$$

7. Упростити израз:

$$\left(\frac{a+1}{a^2 - 4} + \frac{1-a^2}{a^3 + 8} \right) : \frac{1}{(a-1)^2 + 3}$$

8. Упростити израз:

$$\left(\frac{3a-15}{a^2 - a - 20} \right)^{-1} : \frac{a+4}{27}.$$

9. Упростити израз:

$$\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2}{1 - x^2} + \frac{1}{x^2 + x}$$

10. Упростити израз:

$$\left(1 - \frac{3x^2}{1 - x^2}\right) : \left(\frac{x}{x - 1} + 1\right).$$

Рјешења:

1. а) Услов је да је остатак 0. Кад подијелимо полиноме и остатак изједначимо са 0 добијамо да је $a=1$.

2. б) Изједначити остатак са -8, одакле се добија да је $a=1/2$.

3. а) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$ б) $(a-2)(a+2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$ в) $2a(a+1)(a-5)$

4. Након сређивања вриједност израза је: $-xy \cdot (x^2 + y^2)$.

5. $\frac{a + 5}{a - 2}$

6. $1+a$

7. $\frac{2}{2a+1} \left(a \neq -1, a \neq 1, a \neq \frac{1}{2}, a \neq -\frac{1}{2} \right).$

8. $\frac{a+1}{a-2} \left(a \neq -2, a \neq 2 \right)$

9. Дати израз се своди на $\frac{(a-5)(a+4)}{3(a-5)} \cdot \frac{27}{a+4} = 9$

10. $\frac{1+2x}{1+x} \left(x \neq -1, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2} \right)$

5.1.1.2 Линеарне једначине и неједначине.

Ријешити једначине:

1. $1-4x(x+3)(2x+9)+(2x+5)^3=0$

2. $\frac{x}{x-2} - \frac{2x+3}{x+2} = \frac{x^2}{4-x^2}$

3. $2|x+1| + x = 3$

4. $|x+2| + |x-3| = 5$

Ријешити неједначине:

5. $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-1}$

6. $\frac{x+1}{2x-3} < \frac{2}{3}$

7. $\frac{2x-3}{4-x} > 3$

8. $\frac{x+1}{x-1} > 1$

9. $\frac{x+1}{x+2} < \frac{x-1}{x-2}$

10. Ријешити неједначину: $\left| \frac{x}{x-2} \right| < 2$

11. $\frac{x-1}{x+3} < \frac{x+1}{x-3}$

12. $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

Рјешења:

1. -3

2. Једначина је дефинисана за $x \neq 2$ и $x \neq -2$. Нема рјешења (добиле се да је $x = -2$, а то не може бити рјешење јер за $x = -2$ једначина није дефинисана).

3. $x = -5 \vee x = 1/3$

4. $-2 \leq x \leq 3$

5. $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} < 0$

Рјешење посљедње неједначине је: $x \in (0,1)$.

6. $\frac{x+1}{2x-3} - \frac{2}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{9-x}{3 \cdot (2x-3)} < 0$

Рјешење посљедње неједначине је: $x \in (-\infty, 3/2) \cup (9, +\infty)$

7. $\frac{2x-3}{4-x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot (x-3)}{4-x} > 0$

Рјешење посљедње неједначине је: $x \in (3,4)$.

8. $\frac{x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0$

Рјешење посљедње неједначине је: $x \in (1, +\infty)$.

9. $\frac{x+1}{x+2} < \frac{x-1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2) \cdot (x-2)} < 0$

Рјешење посљедње неједначине је: $x \in (-2,0) \cup (2, +\infty)$.

10. Дата неједначина је еквивалентна неједначини $-2 < \frac{x}{x-2} < 2$

Коначно рјешење:

$$x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$$

11. $\frac{x-1}{x+3} < \frac{x+1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{-8x}{(x+3)(x-3)} < 0$
 $x \in (-3,0) \cup (3, +\infty)$

12. $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{-4}{(x+2)(x-2)} < 0$
 $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

5.1.1.3 Проблеми који се свде на рјешавање линеарних једначина

1. Брод је био на путу 3 дана. Првог дана је прешао $\frac{2}{5}$ пута, а другог $\frac{1}{3}$ пута, а трећег још 56 *km*. Колики је пут прешао брод у та три дана?
2. При производњи неког производа има 5% производа са грешком. Колико производа треба производити да се добије 61 560 комада без грешке?
3. Цијена неког производа је повећана за 15%, а затим та нова цијена за још 8% тако да сада износи 1863 КМ. Колика је почетна цијена производа?
4. Конопац дужине 1389 *m* подијели на три дијела тако да је сваки дио већи од претходног за 15%. Одреди дужине свих дијелова.
5. Једна лађа плови уз воду брзином од 3 *m/s*, а друга низ воду брзином од 5 *m/s*. Кад ће се лађе сусрести ако су пошле истовремено једна другој у сусрет из два мјеста чије је растојање 64 *km*? (резултат изразити у сатима, минутима и секундама)
6. Мјерило географске карте је 1: 1 200 000. Колико *cm* износи удаљеност на карти између два мјеста чија је удаљеност 480 *km*?
7. Удаљеност између два мјеста на карти омјера 1: 1 500 000 износи 30 *cm*. Колика је стварна удаљеност између та два мјесту, у *km*?
8. Дуж цијеле полице, која је дугачка 72 *cm*, поређано је (усправно) 26 књига. Неке књиге су дебеле 32 *mm*, а остале 25 *mm*. Колико има дебљих, а колико тањих књига на тој полици?

Рјешења:

1. Поставити једначину: $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + 56 = x \Rightarrow x = 210 \text{ km}$

2. $\frac{95}{100}x = 61560 \Rightarrow x = 64800$

3. Поставити једначину: $x \cdot 1.15 \cdot 1.08 = 1863 \Rightarrow x = 1500$

4. Поставити једначину: $x + x \cdot 1.15 + x \cdot 1.15 \cdot 1.15 = 1389 \Rightarrow x = 400$

Дужине тражених дијелова су: 400*m*, 460*m* и 529*m*.

5. Поставити једначину: $3t + 5t = 64000 \Rightarrow t = 8000\text{s}, t = 2\text{h } 13 \text{ min } 20 \text{ s.}$

6. $x = \frac{480000}{1200000}\text{m} = 0.4\text{m}$ тј. 40 *cm*.

7. $x = 30 \cdot 1500000\text{cm} = 45000000\text{cm} = 450\text{km}$

8. Поставити систем једначина:
$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 32x + 25y = 72 \end{cases}$$

Након рјешавања система добијамо да дебљих књига има 10, а тањих 16.

5.1.1.4 Размјера и пропорција

- Греда дужине 4 m, ширине 30 cm и дебљине 130 mm кошта 26 KM. Колико ће коштати греда дужине 5 m, ширине 33 cm и дебљине 140 mm?
- Мјерило географске карте је 1: 1 200 000. Колико cm износи удаљеност на карти између два мјеста чија је удаљеност 480 km?
- Ивице квадра се односе као 1: 2: 3. Запремина квадра износи 384 dm³. Колика је површина квадра? Изразити површину у cm².
- 65 радника ископа неки канал за 23 дана. Послије 15 дана 13 радника напусти посао. Колико дана треба онима који су остали да заврше осататак посла?
- Мјерило географске карте је 1: 500 000. Колико cm износи удаљеност на карти између два мјеста чија је удаљеност 150 km?
- Удаљеност између два мјеста на карти омјера 1: 500 000 износи 60 cm. Колика је стварна удаљеност између та два мјесту, у km?

Рјешења:

- Запремина прве греде је $V_1=156000 \text{ cm}^3$, а друге $V_2= 231 000 \text{ cm}^3$.

Поставимо пропорцију: $x : 26 = 231 000 : 156 000$, одакле добијамо да је $x = 38.5 \text{ KM}$.

$$2. \quad x = \frac{480000}{1200000} \text{ m} = 0.4 \text{ m} \text{ tj. } 40 \text{ cm}$$

- $a : b : c = 1 : 2 : 3$. Iz proporcije je $a=k, b=2k, c=3k$. $V=abc, P = 2(ab+ac+bc)$
 $384=6k^3$, a odatve dobijamo da je $k=4 \text{ dm}$, pa je $a=4 \text{ dm}, b=8 \text{ dm}, c=12 \text{ dm}$.
 $P=2(32+48+96)=352 \text{ dm}^2 = 35200 \text{ cm}^2$

$$4. \quad \begin{array}{ccc} \downarrow & 65 \text{ радника} & \uparrow 8 \text{ дана} \\ & 52 \text{ радника} & \uparrow X \text{ дана} \end{array} \quad \text{дакле слиједи пропорцијах : } 8 = 65 : 52, x=10 \text{ дана.}$$

$$5. \quad d = \frac{150000}{500000} = 0.3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

$$6. \quad 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m} \\ 0.6 \cdot 500 000 = 300 000 \text{ m} = 300 \text{ km}$$

5.1.1.5 Степеновање и корјеновање

1. Израчунати: $\left(\left(1\frac{1}{3} \right)^{-1} - 2^{-2} \right)^{-3} + 0,25^{-2}$
2. Израчунати вриједност израза: $25^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{2}{3}} + 1000^{\frac{1}{3}}$
3. Упростити израз: $\left(\left(\frac{5x^{-5}}{2y^{-2}} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{y^{-1}}{5x^{-1}} \right)^{-3} \right) : 10x^2y^{-3}$
4. Упростити израз:

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{a}}{1-a} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1 \right), \quad (a > 0, a \neq 1)$$
5. Упростити израз: $\frac{\frac{a^2+b^2}{b} - a}{b^{-1} - a^{-1}} : \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \quad a, b \neq 0, a \neq \pm b$
 па израчунати вриједност добијеног израза за $a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$
6. Израчунати: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}} \right) : \frac{1}{\sqrt{3}}$

Рјешења:

1. $\left(\left(1\frac{1}{3} \right)^{-1} - 2^{-2} \right)^{-3} + 0,25^{-2} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right)^{-3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-2} = 8 + 16 = 24$
2. $6/5$
3. $2x^5y^2$
4. $\frac{1}{\sqrt{a}}$
5. Након сређивања вриједност израза је: $\sqrt{a}$.

$$a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Након уврштавања дате вриједности добијамо: $\sqrt{a} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$

$$6. \left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}} \right) : \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \right) \cdot \sqrt{3} = 6$$

5.1.1.6 Квадратне једначине и неједначине. Квадратна функција

1. Ријешити једначину: $(x-2)^2 + (2x+3)^2 = 13-4x$

$$2. \text{ Ријешити једначину: } \frac{1}{x^2-3x} + \frac{x-2}{2x-6} = -\frac{1}{x}$$

3. Одредити скуп рјешења система:

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{21}{10}$$

$$x^2 - y^2 = 21$$

4. Одредити вриједности реалног параметра k тако да једначина $2x^2 + (k-5)x + 8 = 0$ има једнака и реална рјешења.

5. Одредити вриједности реалног параметра m тако да једначина

$$mx^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - m + 3 = 0 \text{ има реална рјешења.}$$

6. Одредити вриједности реалног параметра m за које је функција

$$f(x) = mx^2 + 2(m+2) \cdot x + 2m + 4 \text{ позитивна за свако } x \in \mathbb{R}.$$

7. Ријешити неједначину:

$$\frac{3x}{x-1} - \frac{1}{x} \leq 1$$

8. Ријешити неједначину:

$$\frac{3x^2-2}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{x+1}$$

9. Скицирати график функције:

$$y = x^2 - |x|$$

10. У једначини $x^2 - (m + 3) \cdot x + m + 2 = 0$ одредити вриједности реалног параметра m тако да рјешења једначине задовољавају услов $x_1^2 + x_2^2 < 5$.
11. Одредити вриједности реалног параметра m тако да једначина $x^2 - 2m \cdot x + m + 2 = 0$ има реална и различита рјешења.
12. Одредити вриједности реалног параметра m тако да једначина $mx^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - m + 3 = 0$ ма реална и различита рјешења.
13. Ријешити неједначину: $\frac{1}{1-x^2} < 1$
14. Ријешити неједначину: $\frac{2}{4-x^2} \geq \frac{1}{2}$

Рјешења:

1. $x_1 = 0, x_2 = -2.4$

2. $x_1 = -2, x_2 = 2$

3. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{21}{10} \Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{21}{10} \Leftrightarrow \frac{21}{xy} = \frac{21}{10} \Rightarrow xy = 10$

Изразимо $y = \frac{10}{x}$

па након уврштавања у другу једначину добијамо биквадратну једначину:

$$x^4 - 21x^2 - 100 = 0. \text{ Уводимо смјену: } x^2 = t, \text{ па добијамо квадратну једначину: } t^2 - 21t - 100 = 0.$$

Рјешење: $x_1 = -5, x_2 = 5$.

4. Услов: дискриминанта $D = 0$, одакле добијамо квадратну једначину $k^2 - 10k - 39 = 0$.

Рјешења: $k_1 = -3, k_2 = 13$.

5. Дата једначина има реална рјешења под условом да је $D \geq 0$, одакле добијамо рјешење

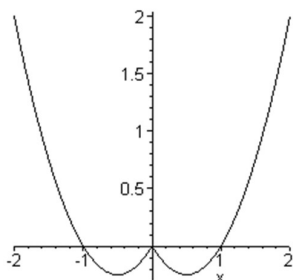
$$m \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty).$$

6. Функција је позитивна за свако $x \in \mathbb{R}$ ако су испуњени услови $m > 0$ и $D < 0$, одакле добијамо рјешење $m \in (2, +\infty)$.

7. Неједначина се своди на неједначину: $\frac{2x^2 + 1}{x \cdot (x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) \leq 0$

Рјешење последње неједначине је: $x \in [0, 1]$

8. Након сређивања дата неједначина се своди на неједначину $\frac{x^2-4}{x^2-1} \leq 0$ чије рјешење је $x \in [-2, -1) \cup (1, 2]$.



9.

10. Услов: $x_1^2 + x_2^2 < 5$ је еквивалентан са $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 5$. Одавде помоћу Виетових формула добијамо неједначину: $m^2 + 4m < 0 \Rightarrow m \in (-4, 0)$.

11. Услов: $D > 0$. $m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

12. Услов: $D < 0$. $m^2 - 3m + 2 < 0 \Rightarrow m \in (1, 2)$

13. Неједначина се своди на: $\frac{x^2}{1-x^2} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

14. Неједначина се своди на: $\frac{x^2}{4-x^2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-2, 2)$

5.1.1.7 Ирационалне једначине

1. Ријешити: $x + \sqrt{1-x} = 1$

2. Ријешити: $1 + \sqrt{1-x} = \sqrt{x} + 2$

Рјешења:

1. $x + \sqrt{1-x} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x} = 1-x \Rightarrow -1-x = (1-x)^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.

Како су рјешења једначине $x_1=2$, $x_2=1$, која не припадају домену, закључујемо да једначина нема рјешења.

2. $1 + \sqrt{1-x} = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow 1-x = x + 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} - x = 0$ Даље имамо да је $x=0$ или $x=1$. Оба рјешења припадају домену, тако да су то заиста рјешења једначине.

5.1.1.8 Експоненцијална функција. Експоненцијалне једначине и неједначине.

1. Скицирати график функције: $y = 2^x - 2$

2. Ријешити једначину:

$$2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$$

3. Ријешити једначину:

$$0,2 \cdot \sqrt{5^{2-x}} = 25^{x-1}$$

4. У скупу реалних бројева ријешити једначину: $4^{x-1} - 5 \cdot 2^{x-2} = 6$

5. Ријешити једначину: $2^{4x} + 2^{4x-1} + 4^{2x-1} + 2^{4x-3} = 62 - 16^{x-1}$

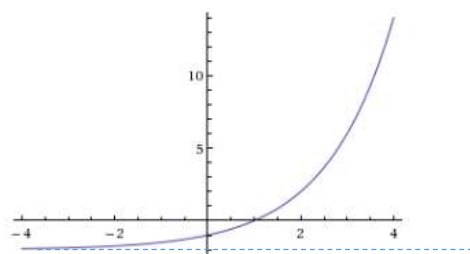
6. Ријешити неједначину:

$$121^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{3-x}}$$

7. У скупу реалних бројева ријешити једначину: $0,04 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{125}\right)^{2-x} = 25^{1-x}$

8. У скупу реалних бројева ријешити једначину: $0,04^{3-x} \cdot \sqrt{125} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-x}$

Рјешења:



1.

$$2 \cdot 3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{9} = 450 \Leftrightarrow 3^x \cdot \left(6 - \frac{4}{9}\right) = 450$$

2.

3. $3^x = 3^4$, одакле добијамо рјешење $x = 4$.

4. Након сређивања неједначина се своди на: $5^{\frac{|2-x|}{2}-1} = 5^{2(x-1)}$, а одавде добијамо једначину $\frac{|2-x|}{2} - 1 = 2(x-1) \Rightarrow x = \frac{4}{5}$. Једначина се своди на $2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$, која се смјеном $2^x = t$ ($t > 0$) своди на квадратну одакле добијамо рјешење: $x = 3$.
5. Једначина се своди на $2^{4x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = 62 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$
- $$121^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{3-x}} \Leftrightarrow 11^{\frac{2}{x}} < 11^{\frac{1}{3-x}} \Leftrightarrow \frac{2}{x} < -\frac{1}{3-x}$$
6. $x \in (-\infty, 0) \cup (3, 6)$
7. Једначина се своди на: $5^{-2-5+\frac{5}{2}x} = 5^{2-2x} \Rightarrow x = 2$
8. Једначина се своди на: $5^{-2(3-x)+3/2} = 5^{1/2x} \Rightarrow x = 3$

5.1.1.9 Логаритамска функција. Логаритамске једначине и неједначине.

1. Одредити домен, нуле и скицирати график функције:

$$y = \log_2(x+2)$$

2. Одредити домен и нуле функције:

$$y = \log(2x^2 - x)$$

$$0,25^{2x-1} = \frac{\log 81}{\log 3}$$

3. Ријешити једначину:

4. Ријешити једначину:

$$\frac{1}{2} \log(2x+5) + \log \sqrt{2x-4} = \log 2x$$

5. Ријешити неједначину

$$\log_{0.5}(x-0.5) + \log_{0.5}(x-1) \geq 1.$$

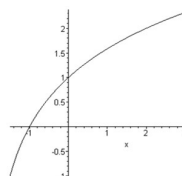
6. Ријешити систем једначина: $100^{\log x} = y^2 + xy - 5$
 $5^{x+y} = (0,2)^{x-2y}$

7. Ријешити систем једначина: $2^{2x-3} \cdot 5^{y+2} = 1000$
 $\log_{\sqrt{2}}(x-y) = 2$

8. Ријешити једначину (не користити дигитрон): $\sqrt{8^{3-x}} = 4^{\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}}$

9. Ријешити једначину (не користити дигитрон): $\sqrt[3]{9^{x+1}} = 3^{\log_2 \frac{4}{\sqrt{2}}}$

Рјешења:



1. Домен функције: $x \in (-2, +\infty)$; Нула: $x = -1$

2. Услов: $2x^2 - x > 0$ Домен функције: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Нуле: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$

3. $0,25^{2x-1} = \log_3 81 \Leftrightarrow 0,25^{2x-1} = 4 \Rightarrow x = 0$

4. Дата једначина је дефинисана за $x \in (2, +\infty)$, па је једначина еквивалентна једначини:

$$\log(2x + 5) \cdot (2x - 4) = \log 4x^2 \Leftrightarrow (2x + 5) \cdot (2x - 4) = 4x^2 \Rightarrow x = 10 \in D.$$

5. Дата неједначина је дефинисана за $x \in (1, +\infty)$, па је неједначина еквивалентна неједначини:

$$\log_{0,5}(x - 0,5) \cdot (x - 1) \geq \log_{0,5} 0,5, \text{ а одавде је}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x \leq 0 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{3}{2}\right].$$

У пресеку са доменом рјешења, коначно рјешење неједначине је: $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

6. Прва једначина је дефинисана за $x \in (0, +\infty)$

Након сређивања друга једначина се своди на: $y = 2x$. Прва једначина, након уврштавања $y = 2x$, се своди на: $\log x^2 = \log(6x^2 - 5) \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, па је $y = 2$. $R_s = \{(1, 2)\}$

7. Услов: $x - y > 0$. Из друге једначине добијамо да је $x - y = 2$. Уврштавајући у прву једначину добијамо експоненцијалну једначину одакле добијамо да је $x = 3, y = 1$.

8. $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9} = -\frac{3}{2}$

$$2^{\frac{3-x}{2}} = 2^{-3} \Rightarrow x = 5$$

9. $\log_2 \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$

$$3^{2 \cdot \frac{x+1}{3}} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

5.1.1.10 Тригонометрија

1. Наћи сва рјешења једначине: $\cos x + 2 = 2 \cdot \sin^2 x$.
2. Наћи сва рјешења једначине: $\sin x + \cos 2x = 1$.
3. Наћи сва рјешења једначине: $(\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$
4. Ако је $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ израчунати $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ без употребе дигитрона.
5. Из тачке О види се спрат А под углом 30° и спрат В под углом 60° , ако је тачка О од зграде удаљена 100m, колико је удаљеност од спрата А до спрата В.
6. Наћи сва рјешења једначине: $\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{3}$
7. Наћи сва рјешења једначине: $\left(\frac{\cos x + 1}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{3}$

Рјешења:

1. Неједначина се након сређивања своди на: $2\cos^2 x + \cos x = 0$.

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Неједначина се након сређивања своди на: $\sin x - 2\sin^2 x = 0$.

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Једначина се своди на $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\text{Рјешења: } x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. $\cos \alpha = 4/5$, $\sin 2\alpha = 24/25$, $\cos 2\alpha = 7/25$

5. Означимо висину спрата А са а, те висину спрата В са b. Из тригонометрије правоуглог троугла добијамо

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{a}{100} \Rightarrow a = \frac{100}{\sqrt{3}}, \operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{b}{100} \Rightarrow b = 100\sqrt{3}.$$

Па добијамо да је тражена висина $h = b - a = 115.47$.

6. Једначина се своди на: $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$ па је

$$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

7. Једначина се своди на: $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ па је

$$x_1 = \pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

5.1.1.11 Планиметрија

1. Површина једног правоугаоника је за 125 cm^2 већа од површине квадрата над мањом страницом. Одредити странице правоугаоника ако се разликују за 5 cm .
2. У троуглу се основица и висина односе као $4 : 3$. Ако те двије величине повећамо са 2 cm , површина порасте за 16 cm^2 . Колике су основица и висина?
3. У правоуглом трапезу висина је 7 cm , а крак 11 cm . Површина трапеза је $49\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Израчунати основице трапеза.
4. Површина ромба је 24 cm^2 , а једна дијагонала има дужину 6 cm . Израчунати полупречник уписане кружнице ромба.
5. Странице троугла ABC су $BC=15 \text{ cm}$, $AC=13 \text{ cm}$ и $AB=4 \text{ cm}$. Израчунати висину која одговара страници AB.
6. У једнакокраки правоугли троугао уписан је квадрат тако да му два тјемена припадају хипотенузи, а по једно катетама. Ако је дужина катете троугла 12 cm , израчунај површину квадрата.
7. Странице троугла односе се као $5 : 7 : 8$, а површина му износи $90\sqrt{3}$. Израчунати полупречник уписаног и описаног круга.
8. У троуглу ABC дати су следећи елементи : страница $a=2 \text{ cm}$ и углови $\gamma=60^\circ$ и $\beta=75^\circ$. Одредити остале основне елементе троугла и полупречник описаног круга.

Решења:

1. Површина правоугаоника је $P_p = P_k + 125 \text{ cm}^2$, одавде је $a \cdot b = b^2 + 125 \dots (*)$. Странице правоугаоника се разликују за 5 cm , па је $a - b = 5$, одакле је $a = b + 5$. Уврштавањем a у једначину $(*)$ добијамо да је страница $b = 25 \text{ cm}$, па је $a = 30 \text{ cm}$.

2. $c:h=4:3 \Rightarrow c=\frac{4}{3}h$ (1)
- $P_1 = P + 16$, па је $\frac{(c+2) \cdot (h+2)}{2} = \frac{c \cdot h}{2} + 16$, па када уврстимо C из (1) добићемо: $14h=84 \Rightarrow h=6\text{ cm}$, $c=8\text{ cm}$.
3. Површина трапеза је $P = \frac{a+c}{2} \cdot h \Leftrightarrow \frac{a+c}{2} \cdot 7 = 49\sqrt{2} \Rightarrow a+c=14\sqrt{2}$ (1)
- Из Питагорине теореме имамо: $(a-c)^2 = 11^2 - 7^2 = 72$, па је $a-c=6\sqrt{2}$ (2). Рјешавањем система једначина (1) и (2) добијамо да основице трапеза износе: $a=10\sqrt{2}$, $c=4\sqrt{2}$.
4. $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 24 \Rightarrow d_2 = 8\text{ cm}$ $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow a=5\text{ cm}$
- $P = a \cdot h \Rightarrow h = \frac{24}{5} \Rightarrow r = \frac{12}{5} = 2,4\text{ cm}$
5. Помоћу Херонове формуле $P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ $s = \frac{a+b+c}{2} = 16$ налазимо да површина датог троугла износи 24 cm^2 , па је тражена висина $h = 12\text{ cm}$.
6. Користити сличност троуглова. Дужина хипотенузе је $c=12\sqrt{2}\text{ cm}$, а странице уписаног квадрата $x=4\sqrt{2}\text{ cm}$. Површина квадрата износи $P=32\text{ cm}^2$.
7. Искористити Херонову формулу за површину троугла. Дужине странице троугла су $a=15\text{ cm}$, $b=21\text{ cm}$, $c=24\text{ cm}$. Полупречник описаног круга: $R = \frac{abc}{4P} \Rightarrow R=7\sqrt{3}\text{ cm}$
- $r = \frac{P}{s} \Rightarrow r=3\sqrt{3}\text{ cm}$ полупречник уписаног круга.
8. $\alpha = 45^\circ$, из синусне теореме: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ добијамо да је $b = \sqrt{3} + 1\text{ cm}$
- $c = \sqrt{6}\text{ cm}$, $R = \sqrt{2}\text{ cm}$.

5.1.1.12 Стереометрија

- Колике су странице правоугаоника који ротацијом око једне странице опише тијело површине 120π , а око друге тијело површине 168π ?
- Израчунати запремину усправне купе чија изводница је за 1 стдужа од висине, а полупречник основе је 3.
- Ивице правоуглог паралелопипеда (квадра) су $a=9\text{ cm}$, $b=7\text{ cm}$ и $c=10\text{ cm}$. За колико треба сваку од њих смањити да се површина тијела смањи за 98 cm^2 ?

4. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде којој је висина 18 cm, а површина дијагоналног пресека 378 cm^2 .
5. Обим основе квадра износи 42cm. Дијагонални пресјек квадра је квадрат површине 225 cm^2 . Израчунај површину и запремину квадра.
6. Основне ивице квадра односе се као 1 : 2. Бочне стране развијене у равнину чине квадрат површине 144 cm^2 . Израчунај површину и запремину тог квадра.
7. Ако се бочне стране правилне тростране призме развију у равнину добије се квадрат површине 144 cm^2 . Израчунати површину и запремину те призме.
8. Основне ивице квадра односе се као 1 : 2. Бочне стране развијене у равнину чине квадрат површине 144 cm^2 . Израчунај површину и запремину тог квадра.
9. Ако се бочне стране правилне тростране призме развију у равнину добије се квадрат површине 144 cm^2 . Израчунати површину и запремину те призме.

Рјешења:

1. Тијела која се добијају ротацијом око страница правоугаоника су ваљци. Површина ваљка је $P = 2\pi r(r+H)$

$$\begin{aligned} a^2 + ab &= 60 \\ \text{Добијамо систем једначина:} \\ ab + b^2 &= 84 \end{aligned}$$

Рјешавањем система добијају се рјешења: $a=5 \text{ cm}$, $b=7 \text{ cm}$.

2. $s^2 = H^2 + r^2 \Leftrightarrow (H+1)^2 = H^2 + 9$. Из посљедње једначине налазимо висину $H = 4 \text{ cm}$.
Запремина купе износи $V = 12\pi \text{ cm}^3$.

3. $P = 2 \cdot (ab + bc + ac)$, $P_1 = P - 96$
 $(9-x) \cdot (7-x) + (7-x) \cdot (10-x) + (9-x) \cdot (10-x) = 174$

$$3x^2 - 52x + 49 = 0, \text{ а одавде је } x = 1 \text{ cm.}$$

Одговарајуће странице паралелопипеда треба смањити за 1 cm.

4. Из површине дијагоналног пресека налазимо да дијагонала основе износи $d = 42 \text{ cm}$, одакле добијамо ивицу основе пирамиде $a = 21\sqrt{2} \text{ cm}$. Запремина пирамиде је $V = \frac{B \cdot H}{3}$, $V = 5292 \text{ cm}^3$
5. $0 = 2(a+b) = 42 \text{ cm}$, одавде је $a + b = 21$.

Површина дијагоналног пресека: $c^2 = 225 \Rightarrow c = 15 \text{ cm}$.

Из услова задатка је дијагонала основе $d = c$, па је $d = 15 \text{ cm}$.

Из Питагорине теореме имамо да је $a^2 + b^2 = c^2$.

Дакле, добијамо систем једначина: $a^2 + b^2 = 225$ $a + b = 21$

Рјешавањем система добијамо: $a_1=12 \text{ cm}$, $b_1 = 9 \text{ cm}$, $a_2 = 9 \text{ cm}$, $b_2 = 12 \text{ cm}$.

$$P = 846 \text{ cm}^2, V = 1620 \text{ cm}^3$$

6. $c=2(a+b)$, $2a = b$.

Из услова задатка је $c^2=144$, одакле је $a + b = 6$. $a = 2 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$.

$$V=abc=96 \text{ cm}^2. P = 2(ab + bc + ac) = 160 \text{ cm}^2.$$

7. $H = 3a$. $(3a)^2 = 144$, па је $a = 4 \text{ cm}$, $H = 12 \text{ cm}$. $P = \sqrt{3}a^2 + 3aH = (16\sqrt{3} + 144)\text{cm}^2$

$$V = B \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot 3a = \frac{3\sqrt{3}}{2} 64 = \frac{192\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}\text{cm}^3$$

8. $c=2(a+b)$, $2a = b$. Из услова задатка је $c^2=144$, одакле је $a + b = 6$. $a = 2 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$.

$$V=abc=96 \text{ cm}^2. P = 2(ab + bc + ac) = 160 \text{ cm}^2.$$

9. $H = 3a$. $(3a)^2 = 144$, па је $a = 4 \text{ cm}$, $H = 12 \text{ cm}$. $P = \sqrt{3}a^2 + 3aH = (16\sqrt{3} + 144)\text{cm}^2$

5.1.1.13 Сличност троуглова

1. Троуглови ABC и DEF су слични, при чему је $AB=3$, $DE =6$. Површина првог троугла је 12. Израчунати површину другог троугла.
2. Троуглови ABC и DEF су слични, при чему су обими дати редом $O_1=12$, $O_2=36$. У ком односу су површине датих троуглова.
3. Правоугли троуглови ABC и DEF су слични, при чему су катете другог троугла у односу 3:4. Ако је хипотенуза првог троугла 5, колико је му је површина.
4. Обим једнакокраког троугла је 64, а крак је за 8 дужи од основице. Израчунати дужину обима O_1 њему сличног троугла чија је дужина основице 12.
5. Катете правоуглог троугла су $a=3$, $b=4$. Израчунати површину њему сличног троугла ако је коефицијент сличности $k = 2/3$.

Рјешења:

1. $P_1 = 12$, те искористимо да је однос $P_1 : P_2 = AB^2 : DE^2$. Према томе $12 : P_2 = 9 : 36$, па коначно добијамо да је $P_2 = 48$.
2. Искористимо однос који вриједи за сличне троуглове, $O_1 : O_2 = AB : DE$, $P_1 : P_2 = AB^2 : DE^2$. Закључујемо да је $P_1 : P_2 = 1 : 9$.
3. Из сличности закључујемо да је $a:b = 3:4$, те искористимо питагорину теорему па добијамо

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ односно } \frac{25b^2}{16} = 25 \Rightarrow b = 4.$$

Па закључујемо да је површина $P = 6$.

4. Како је троугао једнакокраки имамо $a + (a+8) + (a+8) = 64$, односно $a = 16$. Из услова да је $a : a_1 = O : O_1$, па закључујемо да је $O_1 = 48$.

5. Површина првог троугла је $P = \frac{ab}{2} = 6$. Како је $P : P_1 = a^2 : a_1^2$ добијамо да је

$$P : P_1 = 4 : 9, \text{ односно } P_1 = 27/2.$$

5.1.1.14 Права и кружница

1. Одредити параметар m тако да права

$$y = \frac{m}{m^2 - 2} \cdot x + 3m \text{ са } x\text{-осом заклапа угао од } 45^\circ. \text{ За нађено } m \text{ скицирати праву.}$$

2. Написати једначину праве која пролази кроз тачку пресека правих:

$$3x - y + 4 = 0 \text{ и } 4x - 6y + 3 = 0 \text{ и нормална је на правој } p: 5x + 2y + 6 = 0.$$

3. Одредити све вриједности реалног параметра k за које је права

$$y = \frac{5-5k}{1-3k} \cdot x - 3$$

4. Написати једначину кружнице чији је центар тачка $C(-3,4)$ и које пролази кроз координатни почетак.

5. Одредити једначину кружнице којој је дуж AB пречник, где је $A(2,6)$, $B(-4,-2)$.

6. Написати једначину кружнице који садржи тачку $A(9,-5)$, а центар му се налази у пресеку правих $2x + y - 15 = 0$ и $x - 3y + 17 = 0$.

7. Наћи једначине тангенте кружнице конструисаних из тачке $M(-4,3)$ на кружницу

$$k: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0.$$

8. Одредити једначину нормале кружнице $k: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ у његовој тачки $A(2,5)$.

Написати једначину кружнице која садржи тачку $A(8,-3)$, а центар јој се налази у пресеку правих $2x - y + 1 = 0$ и $3x + 2y - 16 = 0$. Скицирати кружницу у правоуглом координатном систему.

9. Одредити једначину кружнице којој је дуж АВ пречник, гдје је А(2,-2), В(8, 6). Скицирати кружницу у правоуглом координатном систему. Одредити затим пресјек кружнице са правом $x - y + 2 = 0$.

Рјешења:

1. Услов:

$$\frac{m}{m^2 - 2} = \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$m_1 = -1, m_2 = 2$$

Рјешења су праве: $y = x - 3$, $y = x + 6$

2. Рјешавањем система једначина добијамо пресјечну тачку датих правих $P(-3/2, -1/2)$.

Једначину праве p изразимо у експлицитном облику: $y = -5/2x - 3$, па из услова да тражена права треба окомита на дату праву p добијамо да је коефицијент правца тражене праве $k = 2/5$.

Једначина праве кроз дату тачку: $y - y_0 = k(x - x_0)$, одакле добијамо коначно да је једначина тражене праве $4x - 10y + 1 = 0$.

3. Услов да права буде опадајућа: Одредити све вриједности реалног параметра k за које је права $\frac{5-5k}{1-3k} < 0$

Рјешење: $k \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

4. Пошто координатни почетак $O(0,0)$ припада кружници, то значи да је $r=OC$, односно

$$r = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ па једначина круга је } (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

5. Како је АВ пречник круга центар круга $C(p,q)$ се налази на средини дужи:

$$p = \frac{2 + (-4)}{2} = -1; q = \frac{6 + (-2)}{2} = 2. \text{ Даље добијамо}$$

$$r = \sqrt{(-4+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ па једначина кружнице гласи}$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

6. Координате центра круга добијамо решавањем система: $2x+y-15=0$, $x-3y+17=0$ чија су рјешења $x=4$, $y=7$, односно центар кружнице је $C(4,7)$. Полупречник кружнице је растојање центра од дате тачке на кружници А (9,-5):

$$r = \sqrt{(9-4)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ према томе једначина кружнице гласи}$$

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 169$$

7. Координате тачке $M(-4,3)$ задовољавају једначину праве, односно $n = 4k + 3$. Из општег облика једначине кружнице добијамо да се центар налази у тачки $C(1,-2)$, те $r^2=5$. Из услова тангентности добијамо: $5(1+k^2)=(k+2+4k+3)^2$ те једначина се своди на $2k^2 + 5k + 2 = 0$ односно $k_1=-2$, $k_2=-1/2$. Па једначине тангенте гласе: $t_1: y = -2x - 5$, $t_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$.
8. Нормала на кружницу је права нормална на тангенту у датој тачки, па је $k_n = -1/k_t$. Координате тачке M задовољавају једначину праве, па имамо $n = 5-2k$. Из општег услова кружнице можемо одредити центар $C(-2,2)$, те полупречник $r=5$. Из услова тангентности добијамо да је $9k^2 + 24k + 16 = 0$ односно $k_{1/2} = -4/3$. Па једначина нормале гласи $n: y = 3/4x + 7/2$.
9. $C(2, 5)$, $r = 10$ cm, $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 100$
10. $C(5, 2)$, $r=5$, $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ Пресјечне тачке са правом: $P_1(0, 2)$, $P_2(5, 7)$

5.2 Физика

Бодови	15
Вријеме за рад	60 мин

Од кандидата се очекује да покаже елементарно знање из класичне механике и геометријске оптике. Под тим се подразумева познавање физичких величина, њихових мјерних јединица и закона класичне механике и геометријске оптике. Знање из наведених области кандидат треба да покаже кроз примјену наученог градива у рјешавању разноврсних задатака који су саставни дио класичне механике и геометријске оптике. Пријемни испит из физике састоји се од задатака различите комплексности, а поступак рјешавања задатака треба да буде детаљно, јасно и прегледно написан са коначним рјешењем и одговарајућом јединицом физичке величине која је израчуната. Тестом су обухваћене следеће области:

- Кинематика;
- Динамика;
- Импулс, рад, енергија, снага, закони одржања;
- Механика флуида;
- Механичке осцилације;
- Геометријска оптика.

Начин бодовања и оцјењивања задатака

Број задатака и број бодова које носи сваки задатак зависи од комплексности задатка. Задаци се могу бодовати и парцијално уколико задатак има сложенији поступак рјешавања или се састоји из два сегмента (нпр. задаци који се састоје од нумеричког и графичког начина рјешавања у геометријској оптици или задаци у којима је потребно израчунати двије физичке величине да се дође до крајњег рјешења задатка).

Литература

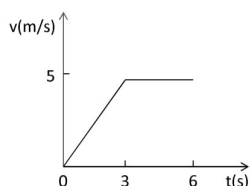
- Родољуб Баврлић, Физика за 1. и 2. разред гимназије општег, природно-математичког и рачунарско-информатичког смјера;
- Г. Димић, Г. Савановић, Физика за гимназије;
- Ј. Јањић, М. Павлов, С. Стојановић, Физика са збирком задатака и приручником за лабораторијске вјежбе за трогодишње стручне школе;
- Young H. D., Freedman R. A., University Physics 13th Edition, Pearson Education, San Francisco, 2012.

5.2.1 Примјери задатака из физике по областима

5.2.1.1 Кинематика

Задатак 1 (5 бодова)

На слици је приказан дијаграм брзине кретања тијела. Одредити пређени пут и убрзање тијела по истеку шесте секунде кретања.



Рјешење:

Са графика видимо да се тијело на првој етапи пута (прве 3 секунде) креће равномерно-убрзано без почетне брзине ($v_0=0$), а након $t=3$ s, достиже брзину $v=5$ m/s и на другој етапи пута (преостале 3 секунде) креће равномерно (константном брзином $v=5$ m/s). На првој етапи пређени пут је дат изразом:

$$s_1 = \frac{at^2}{2}.$$

Пошто је убрзање непознато може се одредити из израза за брзину при равномерно-убрзаном кретању:

$$v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{5 \frac{m}{s}}{3s} = 1,67 \frac{m}{s^2}.$$

Даље се замјеном у израз за пређени пут на првој етапи пута добија:

$$s_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{1,67 \frac{m}{s^2} \cdot (3s)^2}{2} = 7,5m$$

$$s_2 = vt = 5 \frac{m}{s} \cdot 3s = 15m$$

Укупан пређени пут износи:

$$s = s_1 + s_2 = 22,5m$$

Убрзање на крају шесте секунде кретања једнако је нули ($v=\text{const.}$).

Задатак 2 (5 бодова)

Аутомобил прву половину пута пређе брзином 50 km/h, а другу половину пута брзином 80 km/h. Колика је средња брзина аутомобила на цијелом путу?

Рјешење:

Просјечна брзина аутомобила једнака је количнику пређеног пута и времена за које је пређен:

$$v_{sr} = \frac{s}{t} \Leftrightarrow s = v_{sr} \cdot t$$

Пошто се пут састоји из двије етапе истих дужина, тј. $s_1=s/2$ и $s_2=s/2$ за сваку етапу се може примјенити претходна једначина:

$$s_1 = \frac{s}{2} = v_1 \cdot t_1, \quad s_2 = \frac{s}{2} = v_2 \cdot t_2$$

Како су брзине кретања по етапама познате, вријеме потребно за прелазак прве и друге етапе t_1 и t_2 , респективно, се може изразити из претходних израза и замјеном у израз за средњу брзину добија се:

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}}$$

Одакле се коначном сређивањем претходног израза добија средња брзина на цијелом путу:

$$v_{sr} = 61.54 \frac{km}{h}$$

Задатак 3 (3 бода)

Свјетски рекорд у трчању на 100 m поставио је Хусеин Болт, истрчавши 100 метара за 9,58 секунди. Коликом се просјечном брзином у километрима на час кретао Болт? Колико пута је спорији од брзине звука, која износи 1236 km/h.

Рјешење:

Просјечну брзину рачунамо у m/s:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100m}{9.58s} = 10.46 \frac{m}{s}$$

С обзиром да брзину треба претворити у km/h, прво ћемо метре претворити у километре $0.01046 \frac{km}{s}$

Даље, како је $1h = 60min = 3600s$ тј. једна секунда представља 3600 дио једног часа, пишемо:

$$0.01046 \frac{km}{\frac{1}{3600}h} = 3600 \cdot 0.01046 \frac{km}{h} = 37.6 \frac{km}{h}$$

Поређењем ове двије вриједности добија се:

$$\frac{1236 \frac{km}{h}}{37.6 \frac{km}{h}} = 32.9 \approx 33$$

Што значи да је брзина звука 33 пута већа.

Задатак 4 (3 бода)

Два шетача удаљени су 200 m и ходају један према другом. Први шетач хода брзином од 1 m/s, а други брзином од 3 m/s. Након колико времена ће се шетачи срести и на којем дјелу пута ће се то десити мјерено од првог шетача?

Рјешење:

Укупан пређени пут два шетача једнак је збиру њихових пређених путева, а вријеме током којег се крећу до тренутка сусрета је исто за оба шетача па се може записати:

$$s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t$$

одавде је тражено вријеме:

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{200m}{1\frac{m}{s} + 3\frac{m}{s}} = 50s$$

Удаљеност од почетне тачке првог шетача у тренутку времена сусрета ће бити:

$$s_1 = v_1 t = 1\frac{m}{s} \cdot 50s = 50m$$

Задатак 5 (5 бодова)

Аутомобил се креће константним убрзањем $4,0 \text{ m/s}^2$. Ако у почетном тренутку ($t=0$), аутомобил има брзину 15 m/s , израчунати:

- Пређени пут и брзину на истеку друге секунде.
- Гдје ће се аутомобил налазити када његова брзина буде износила 25 m/s ?

Решење:

а) Једначине које описују праволинијско кретање константним убрзањем су:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Из ове двије једначине се може елиминисати вријеме и приказати брзина у зависности од убрзања, пређеног пута и почетне брзине:

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot s$$

Пређени пут и брзину на истеку друге секунде налазимо преко прве двије релације:

$$v = v_0 + a \cdot t = 15\frac{m}{s} + 4\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 23\frac{m}{s}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 15\frac{m}{s} \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot 4\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 38m$$

Након двије секунде тијело се налази 38 метара од почетног положаја и има брзину 23 m/s .

б) Трећу релацију користимо да бисмо одредили удаљеност тијела од почетне позиције у тренутку када има брзину 25 m/s , чиме елиминишемо вријеме из прорачуна:

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot s \Rightarrow s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$x = \frac{\left(25\frac{m}{s}\right)^2 - \left(15\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 4\frac{m}{s^2}} = 50m$$

Задатак 6 (3 бода)

Аутомобил се креће почетном брзином 80 km/h и почиње да успорава убрзањем 10 m/s^2 . Колику брзину ће аутомобил имати након пређених 20 m ?

Решење:

Прво је потребно да све јединице буду изражене у јединицама СИ система:

$$v_0 = 80\frac{km}{h} = 80 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 22,22\frac{m}{s}$$

Пошто је позната почетна брзина и пређени пут за прорачун брзине користи се израз за равномерно-успорено кретање којим је дата зависност брзине, пређеног пута и убрзања $v^2 = v_0^2 - 2as$

Одавде је:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2as} = \sqrt{\left(22,22 \frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 20m} = 9,69 \frac{m}{s}$$

Задатак 7 (5 бодова)

Тијело је бачено вертикално навише почетном брзином 40 m/s. На којој ће се висни налазити тијело после 3 s кретања и колику ће брзину имати у том тренутку? Сматрати да је отпор ваздуха занемарљив.

Рјешење:

Задато кретање представља хитац навише. Овакво кретање је равномерно-успорено кретање константним убрзањем g тако да је описано једначинама кретања из којих се директно могу одредити тражене величине:

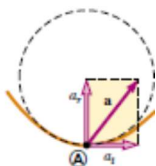
$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 40 \frac{m}{s} \cdot 3s - \frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (3s)^2}{2} = 75,85m$$

$$v = v_0 - gt = 40 \frac{m}{s} - 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 3s = 10,57 \frac{m}{s}$$

Задатак је могуће рјешити и преко закона одржања механичке енергије.

Задатак 8 (3 бода)

Аутомобил има максимално центрипетално убрзање од 9,4 m/s². Ако се креће константном брзином од 40 m/s, колики је минимални радијус круга по којем се аутомобил може кретати?

Рјешење:

Кретање аутомобила се дешава по кружној путањи, без промјене интензитета брзине што значи да не постоји тангенцијална компонента убрзања. Пошто се мијења смјер вектора брзине тијела, онда постоји нормална компонента убрзања, која је управљена нормало на вектор брзине (центрипетално убрзање). По дефиницији центрипетално убрзање је једнако:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

гдје v представља интензитет брзине којом се тијело креће, а r полупречник кружнице по којој се тијело креће.

Минимални радијус (полупречник) по којем се тијело може кретати, једнак је:

$$R = \frac{v^2}{a_{cp}} = \frac{\left(40 \frac{m}{s}\right)^2}{9,4 \frac{m}{s^2}} = 170m$$

Задатак 9 (3 бода)

Тијело се креће константном брзином по кружници полупречника 5 m. Ако тијело обиђе пун круг за 4 секунде колико је убрзање тијела?

Рјешење:

С обзиром да се тијело креће равномерно брзином, не мјења се интензитет брзине, онда постоји само нормална компонента убрзања. Тијело опише пун круг за 4 секунде:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2R\pi}{T}$$

Уврштавањем ове релације за брзину може се добити још један израз за центрипетално (нормално) убрзање:

$$a_{cp} = \frac{4R\pi^2}{T^2} = \frac{4 \cdot 5m \cdot 3,14^2}{(4s)^2} = 12 \frac{m}{s^2}$$

гдје Т представља период, или вријеме потребно да тијело обиђе пун круг.

Задатак 10 (3 бода)

Точак аутомобила се креће угаоном брзином 4 rad/s и почиње равномерно успоравати убрзањем 0,5 rad/s². Након колико времена ће се точак зауставити?

Рјешење:

Како је кретање тијела равномерно-успорено константим убрзањем α , угаона брзина се рачуна према изразу: $w = w_0 - \alpha t$

Пошто се тражи вријеме након којег ће се тијело зауставити то значи да је у тренутку заустављања $\omega=0$, те се замјеном у претходни израз може изразити и израчунати вријеме заустављања точка:

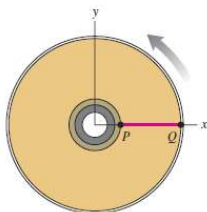
$$t = \frac{w_0}{\alpha} = \frac{4 \frac{rad}{s}}{0,5 \frac{rad}{s^2}} = 8s$$

Задатак 11 (5 бодова)

Угаона брзина ДВД диска у тренутку $t=0$ износи 27,5 rad/s, а његово угаоно убрзање је константно и износи -10 rad/s². У почетном тренутку линија PQ на површини диска лежи дуж x осе.

а) Колика је угаона брзина у тренутку $t=0,3$ s? Колики угао линија PQ заклапа са позитивним дјелом x осе у овом тренутку?

б) Полупречник стандардног ДВД диска износи 6 cm. Колико износи тангенцијално и нормално убрзање у тренутку $t=0,3$ s? Колика је брзина тачке на ободу диска у том тренутку?



Рјешење:

а) Једначине које описују ротационо кретање тијела константним угаоним убрзањем, аналогне су једначинама које описују праволинијско кретање константним убрзањем. Стога се за угаону брзину у тренутку $t=0,3\text{ s}$ може записати:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 24,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Описани угао у том тренутку износи:

$$\theta = \omega t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 7,80 \text{ rad}$$

То значи да је диск направио $7,80 \text{ rad} / 2\pi \text{ rad} = 1,24$ обртаја. тј да се линија PQ, након једног обртаја вратила у свој почетни положај и помјерила се за $0,24$ једног обртаја, тј. да заклапа угао $0,24 \text{ обртаја} = 0,24 \cdot 360^\circ = 87^\circ$ у односу на позитивни дио x осе.

б) Тачку на ободу диска, можемо посматрати као материјалну тачку, која се креће кружно на растојању од 6 cm од осе ротације. Убрзање се може раставити на нормално и тангенцијално. Тангенцијално убрзање износи:

$$a_t = r\alpha = 0,06 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

гдје r представља растојање од осе ротације, које је једнако полупречнику диска, јер се тачка налази на ободу диска. Брзина ове тачке која је потребна да би се одредило колико је центрипетално убрзање, једнака је:

$$v = \omega \cdot r = 24,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,06 \text{ m} = 1,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Па ће стога нормално убрзање тачке у почетном тренутку износити:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{\left(1,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,06 \text{ m}} = 36,01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Из једначина се може закључити да се тачке које су ближе осе ротације спорије крећу од тачака које су даље од осе ротације.

Задатак 12 (5 бодова)

Угаона брзина осовине мотора смањи се са 200 rad/s на 140 rad/s у току 5 s кретања.

а) Колико је угаоно убрзање тачка?

б) Колики је број обртаја које осовина направи?

Рјешење:

а) Из услова задатка видимо да је дато равномерно-успорено ротационо кретање, па се угаоно убрзање може директно одредити из израза за угаону брзину:

$$w = w_0 - \alpha t$$

$$\alpha = \frac{w - w_0}{t} = \frac{200 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 140 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Број обртаја може се одредити из израза за угаони помјерај при равномерно-успореном кретању:

$$\varphi = w_0 t - \frac{\alpha t^2}{2} = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 850 \text{ rad}$$

и израза којим је угаони помјерај повезан са бројем обртаја. Ако једном обртају одговара угаони помјерај 2π , онда ће при N обртаја угаони помјерај бити:

$$\varphi = 2\pi \cdot N$$

а одавде је

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{850 \text{ rad}}{2 \cdot 3,14 \text{ rad}} = 135,35$$

Задатак 13 (3бода)

Бициклиста је током 30 минута прешао растојање од 9 km. Колика је средња брзина бициклисте на овом путу изражена у метрима у секунди?

Рјешење:

Након изражавања познатих величина у јединицама интернационалног система $s = 9 \text{ km} = 9 \times 10^3 \text{ m}$, $t = 30 \text{ min} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ s}$ добија се средња (просјечна) брзина на цијелом путу:

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{9 \cdot 10^3 \text{ m}}{1,8 \cdot 10^3 \text{ s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Задатак 14 (3бода)

Аутомобил пут од 120 km пређе за 50 минута. Колика је средња брзина Аутомобила изражена у метрима у секунди?

Рјешење:

Након изражавања познатих величина у јединицама интернационалног система $s = 120 \text{ km} = 120 \times 10^3 \text{ m}$, $t = 50 \text{ min} = 3 \cdot 10^3 \text{ s}$ добија се средња (просјечна) брзина на цијелом путу:

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ m}}{3 \cdot 10^3 \text{ s}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Задатак 15 (3бода)

Лопта је бачена вертикално навише почетном брзином 15 m/s. Колику ће максималну висину достићи? ($g=10 \text{ m/s}^2$)

Рјешење:

Максимална висина лопте се одређује из једначина равномерно-успореног кретања у Земљиним гравитационом пољу (хитац навише). Прво се одређује вријеме кретања тијела из услова да је при максималној висини брзина лопте нула:

$$v = v_0 - gt = 0, \quad t = \frac{v_0}{g} = 1,5 \text{ s}$$

Максимална висина се добија уврштавањем времена у једначину за пређени пут (висину):

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 11,25 m$$

5.2.1.2 Динамика

Задатак 1 (3 бода)

На тијело које се налази на хоризонталној подлози дјелује сила сталног интензитета од 75 N. Ако је маса тијела 1,5 kg одредити убрзање тијела и брзину након 5 секунди од почетка кретања.

Рјешење:

У складу са основном једначином динамике транслаторног кретања важи:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

Пошто на тијело дјелује само једна сила, једначину можемо записати у скалараном облику:

$$F = m \cdot a$$

Одавде се директно замјеном познатих величина може одредити убрзање:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{75 N}{1,5 kg} = 50 \frac{m}{s^2}$$

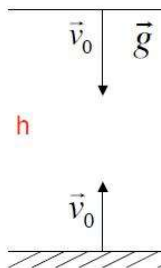
Пошто је кретање равномерно-убрзано без почетне брзине, брзина кретања је:

$$v = a \cdot t = 50 \frac{m}{s^2} \cdot 5 s = 250 \frac{m}{s}$$

Задатак 2 (5 бодова)

Услед дејства силе отпора средине тијело масе 4 kg пада на Земљу убрзањем 4,81 m/s². Одредити интензитет ове силе?

Рјешење:



У складу са основном једначином динамике транслаторног кретања важи:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

Примјенимо ли то на тијело које пада ка Земљи на њега дјелују гравитациона сила у смјеру нанаиже (смјер $\vec{g}$) и сила отпора ваздуха у супротном смјеру, те се примјеном основне једначине

динамике транслације добија:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_o$$

Како је сила $m\vec{g}$ паралелна са смјером кретања тијела, а сила $\vec{F}_o$ супротног смјера од резултатне силе $m\vec{a}$, претходна једначина се може записати у скалараном облику: $ma = mg - F_o$.

Одавде је једноставно израчунати интензитет силе отпора ваздуха:

$$F_o = mg - ma = m(g - a) = 4\text{kg} \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 20\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 20\text{N}$$

Задатак 3 (5 бодова)

На тијело масе 1 kg дјелују двије међусобно окомите силе интензитета 3 N и 4 N.

а) Коликим се убрзањем креће ово тијело?

б) Коликом силом и у ком правцу и смјеру треба дјеловати трећом силом да би тијело мировало?

Рјешење:

а) Пошто на тијело дјелују свије силе у различитим правцима, тијело ће се кретати у смјеру резултантне силе. Дакле, прво је потребно одредити резултатну, а затим примјенити основну једначину динамике. Како силе дјелују међусобно окомито интензитет њихове резултанте може се одредити из Питагорине теореме:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(3\text{N})^2 + (4\text{N})^2} = 5\text{N}$$

Користећи основну једначину динамике добија се и тражено убрзање:

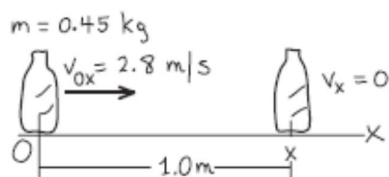
$$a = \frac{F}{m} = \frac{5\text{N}}{1\text{kg}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

б) Да би се уравнотежила резултантна сила потребно је дјеловати силом истог интензитета и правца, а супротног смјера од резултанте. Дакле, да би се поништило дејство силе $\vec{F}$ потребно је дјеловати силом интензитета истог интензитета ($F=5\text{ N}$) и правца, али у супротног смјеру вектору $\vec{F}$, тј. силом $-\vec{F}$.

Задатак 4 (5 бодова)

Тијело масе 0,45 kg је гурнуто праволинијски почетном брзином од 2,8 m/s. Због трења о подлогу тијело успорава и зауставља се након 1,0 m. Колико износи резултанта сила која дјелује у x правцу?

Рјешење:



У вертикалном правцу дјелују тежина тијела и нормална сила, а пошто се тијело не креће у овом правцу, те двије силе се поништавају. У хоризонталном правцу након што је тијело гурнуто оно остаје само под дјеловањем силе трења које га успорава. Кретање тијела је описано једначином:

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot s$$

гдје $v_0 = 2.8 \text{ m/s}$, а у положају када тијело стаје $s = 1 \text{ m}$, а $v = 0$. Из претходне једначине се може одредити убрзање тијела:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s} = \frac{\left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 1 \text{ m}} = -3.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

За координатни систем оријентисан као на слици добије негативан предзнак зато што тијело успорава. Ипак оно што стварно чини убрзање негативним је због тога што је убрзање усмјерено ка негативном дијелу x осе. Према другом Њутновом закону, смјер резултантне силе која дјелује на тијело, представља и смјер убрзања. Стога ће и сила која дјелује у x правцу бити негативна:

$$\sum F_x = ma = 0.45 \text{ kg} \cdot \left(-3.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -1.8 \text{ N}$$

Задатак 5 (5 бодова)

Аутомобил тежине $2.49 \cdot 10^4 \text{ N}$ креће се одређеном брзином и наједном кочи под дјеловањем силе $F_x = -1.83 \cdot 10^4 \text{ N}$. Колико је убрзање аутомобила?

Рјешење:

На основу тежине тијела, може се одредити његова маса:

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{2.49 \cdot 10^4 \text{ N}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2540 \text{ kg}$$

Даље, на основу масе може се одредити колико је убрзање тијела користећи други Њутнов закон. Пошто сила дјелује ка негативном дијелу x осе, њена x компонента ће бити негативна. Исто ће важити и за убрзање:

$$a = \frac{F_x}{m} = \frac{-1.83 \cdot 10^4 \text{ N}}{2540 \text{ kg}} = -7.20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Задатак 6 (5 бодова)

Коликом тангенцијалном силом треба дјеловати на материјалну тачку масе 10 g која ротира по кругу полупречника 50 cm да би имала стално угаоно убрзање 0.2 rad/s^2 ?

Рјешење:

Прво је потребно масу претворити у СИ јединице ($m = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$, $r = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$). Тражена тангенцијална сила може се одредити из израза:

$$F_t = m a_t$$

Непознато тангенцијално убрзање може се одредити из релације која повезује тангенцијално и угаоно убрзање:

$$a_t = r \cdot \alpha$$

Замјеном у израз за силу добија се:

$$F_t = m \cdot r \cdot \alpha = 10^{-2} \text{ kg} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 0.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 10 \text{ mN}$$

Задатак 7 (5 бодова)

Аутомобил масе 1 t креће се по кружној путањи радијуса 20 m брзином 72 km/h. Колика центрифугална сила дјелује на њега?

Рјешење:

Прво је неопходно све јединице претворити у јединице СИ система

$$(m = 1t = 1000\text{ kg}, v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \cdot \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}).$$

Центрифугална сила је одговорна за центрифугално убрзање тијела (усмјерено дуж радијуса од центра кружне путање), а једнака је:

$$F_{cf} = ma_{cf}$$

при чему је центрифугално убрзање:

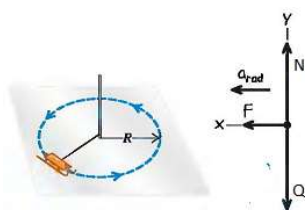
$$a_{cf} = \frac{v^2}{r}$$

Коначно, тражена сила износи:

$$F_{cf} = m \cdot \frac{v^2}{r} = 1000\text{ kg} \cdot \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{20\text{ m}} = 20\text{ kN}$$

Задатак 8 (5 бодова)

Тијело масе 25 kg налази се на леду, чији се се трење о подлогу може занемарити и закачено је за уже дужине 5 метара, које ротира око непокретног ослоња у хоризонталној равни. Брзина тијела је константна. Ако тијело направи пет пуних обртаја у минути, колика је сила затезања канапа?

Рјешење:

Тијело врши равномерно кружно кретање, што значи да нема промјене интензитета брзине, али има сталне промјене правца и смјера, те постоји нормална компонента убрзања. Она се зове центрипетално убрзање код равномерног кружног кретања. Други Њутнов закон описује кретање овог тијела и на основу њега можемо пронаћи силу затезања ужета. У вертикалном правцу нема убрзања, стога су тежина тијела и сила отпора подлоге једнаке по интензитету, а супротне по смјеру (уравнотежене). У хоризонталном правцу дјелује само сила затезања ужета и она преузима улогу центрипеталне силе које узрокује кружно кретање тијела:

$$F = ma_c$$

Да бисмо одредили центрипетално убрзање, потребно је да нађемо брзину тијела. Тијело обиђе пун круг за један период. Овдје, тијело обиђе 5 пуних кругова за један минут, а то се деси за пет пуних периода. То значи да је пређени пут тијела за један период $2R\pi$ (обим кружнице):

$$v = \frac{2R\pi}{\frac{t}{n}} = \frac{2R\pi}{T} = \frac{2 \cdot 5m \cdot 3,14}{12s} = 2,62 \frac{m}{s}$$

Даље се може одредити центрипетално убрзање и центрипетална сила, односно сила затезања ужета:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(2,62 \frac{m}{s}\right)^2}{5m} = 1,37 \frac{m}{s^2}$$

$$F = ma_c = 25kg \cdot 1,37 \frac{m}{s^2} = 34,3N$$

Задатак 9 (5 бодова)

На тијело масе 2 kg које се креће брзином 5,5 m/s у смјеру супротно смјеру кретања дјелује стална сила интензитета 10 N током 2 s кретања.

- Колику брзину ће имати тијело по престанку дејства силе?
- Колика је промјена импулса током 2 s кретања?

Рјешење:

а) Пошто се тражи брзина кретања, а дата је и почетна брзина неопходно је основну једначину динамике записати преко промјене импулса. Наиме, сила представља брзину промјене импулса што се може и показати:

$$F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Како сила дјелује у смјеру кретања крајња брзина је већа од почетне, а из овог израза се може директно и одредити (при чему је за $t_0=0$, $\Delta t=t$):

$$v_2 = v_1 + \frac{F \cdot t}{m} = 5,5 \frac{m}{s} + \frac{10N \cdot 2s}{2kg} = 15,5 \frac{m}{s}$$

Да је сила дјеловала у супротном смјеру смањивала би брзину тијела.

б) Промјена импулса је:

$$\Delta p = m \Delta v = 2kg \cdot (15,5 - 5,5) \frac{m}{s} = 20kg \frac{m}{s}$$

Задатак 10 (3 бода)

Униформна сфера момента инерције $0,08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ротира око осе која пролази кроз центар сфере кружном фреквенцијом 10 rad/s . Колики је момент импулса сфере?

Рјешење:

Момент импулса је повезан са моментом инерције и кружном фреквенцијом изразом:

$$L = I \cdot \omega$$

Замјеном величина у претходни израз добија се:

$$L = 0,08kg \cdot m^2 \cdot 10 \frac{rad}{s} = 0,8 \frac{kg \cdot m^2 \cdot rad}{s}$$

Задатак 11 (5 бодова)

Точак момент инерције 10 kgm^2 креће из стања мировања и достиже угаону брзину 15 rad/s под дејством константног момента силе од $20 \text{ N}\cdot\text{m}$. Одредити:

- вријеме након којег точак достиже наведену брзину;
- број обртаја које направи за то вријеме.

Рјешење:

За одређивање времена кретања и броја обртаја неопходно је написати једначине кретања и искористити везу између момента инерције и момента силе како би се израчунало угаоно убрзање:

$$M = I \cdot \alpha$$

Ово је основна једначина динамике ротације аналогна другом Њутновом закону код translације ($F=ma$).

Одавде је:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{20 \text{ N}\cdot\text{m}}{10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Из израза за угаону брзину при равномјерно-убрзаном кретању (по услови задатка $w_0 = 0$):

$$w = w_0 - \alpha t$$

Изражавањем времена добија се:

$$t = \frac{w}{\alpha} = \frac{15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} = 7,5 \text{ s}$$

Даље се број обртаја може изразити користећи изразе за угаони помјерај: $\varphi = \frac{\alpha t^2}{2} = 2\pi N$

Коначно

$$N = \frac{\alpha t^2}{4\pi} = \frac{2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (7,5 \text{ s})^2}{4 \cdot 3,14 \text{ rad}} = 8,95 \text{ обртаја}$$

Задатак 12 (4 бода)

На ваљак полупречника 20 cm и масе 15 kg намотано је уже које се вуче силом сталног интензитета 12 N . Колика је угаона брзина ваљка? (Момент инерције ваљка одређује се из израза

$$I = \frac{mr^2}{2}.$$

Рјешење:

Ротацију ваљка изазива момент тангенцијалне силе M , а он се може изразити преко силе и њеног крака, али и преко момента инерције и угаоног убрзања точка:

$$M = I \cdot \alpha = F \cdot r$$

Одавде је:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{F \cdot r}{I} = \frac{F \cdot r}{\frac{mr^2}{2}} = \frac{2F}{mr} = \frac{2 \cdot 12N}{15kg \cdot 0,2m} = 8 \frac{rad}{s^2}$$

Задатак 13 (4 бода)

На материјалну тачку масе 5 g која ротира по кружности полупречника 10 cm дјелује момент тангенцијалне силе од 0,02 m·N. Коликим угаоним убрзањем се креће материјалан тачка?

Рјешење:

Прво се јединице физичких величина морају претворити у јединице СИ система ($m=5g=5 \times 10^{-3}kg$, $r=10cm=0,1m$).

Момент тангенцијалне силе (дјелује под углом 90° у односу на вектор положаја материјалне тачке) је дат изразом:

$$M = F_t \cdot r = m \cdot a_t \cdot r$$

Убрзање материјалне тачке изразићемо користећи везу између тангенцијалног и угаоног убрзања:

$$a_t = r \cdot \alpha$$

Замјеном у израз за момент силе добија се:

$$M = m \cdot \alpha \cdot r^2$$

Одавде је:

$$\alpha = \frac{M}{mr^2} = \frac{0,025m \cdot N}{5 \times 10^{-3}kg \cdot (0,1m)^2} = 50 \frac{rad}{s^2}$$

Задатак 14 (3 бода)

Хидраулична преса има чепове попречних пресека 30 cm² и 15 cm². Ако је сила која дјелује на већем чепу 10 N, колика сила дјелује на мањем чепу?

Рјешење:

Из услова задатка је: $S_1 = 30cm^2$, $S_2 = 15cm^2$, $F_1 = 10N$.

Непозната сила F_2 се одређује из услова једнакости притисака на чеповима хидрауличне пресе:

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = \frac{F_1 S_2}{S_1} = 5N$$

Дакле, на мањем чепу дјелује мања сила.

Задатак 15 (3 бода)

Брзина протицања воде у цијеви на мјесту гдје је површина попречног пресека цијеви 6 cm² износи 2 m/s. Колика је брзина протицања воде на мјесту гдје је попречни пресјек цијеви 5 cm²?

Рјешење:

Из услова задатка: $S_1 = 6\text{cm}^2$, $S_2 = 5\text{cm}^2$, $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Непозната сила се одређује из једначине континуитета:

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Дакле, кроз мањи попречни пресјек брзина протока флуида је већа.

Задатак 16 (3 бода)

На тијело дјелују двије силе интензитета 3 N и 4 N у међусобно нормалним правцима. Одредити интензитет, правац и смјер силе којом је потребно дјеловати да би ово тијело било у равнотежи.

Рјешење:

Пошто силе $\vec{F}_1 = 3\text{N} \cdot \vec{i}$ (усмјерена дуж x осе) и $\vec{F}_2 = 4\text{N} \cdot \vec{j}$ (усмјерена дуж y осе) дјелују међусобноокомито, правац и смјер резултујуће силе одређен је векторским збиром компоненти, а интензитет резултантне силе се може одредити на основу Питагорине теореме:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5\text{N}$$

Да би тијело било у равнотежи потребно је дјеловати силом истог интензитета и правца, а супротног смјера од силе F .

Задатак 17 (3 бода)

Колики притисак на хоризонталну подлогу врши коцка ивице 10 cm и масе 2 kg? ($g=10\text{m/s}^2$)

Рјешење:

Коцка врши притисак усљед своје тежине ($F=mg$) на подлогу по површини стране ($S=a^2=(10\text{cm})^2=10^{-2}\text{m}^2$) којом додирује подлогу.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10^{-2}\text{m}^2} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2 \cdot 10^3 \text{Pa} = 2\text{kPa}$$

5.2.1.3 Импулс, рад, енергија, снага, закони одржања

Задатак 1 (3 бода)

Колика је снага грађевинске машине која за 5 минута изврши рад од 30 kJ?

Рјешење:

Прво је неопходно све јединице претворити у јединце СИ система ($t=5\text{min}=5 \cdot 60\text{s}=300\text{s}$, $A=30\text{kJ}=30000\text{J}$).

Како је снага извршени рад у јединици времена, тј.

$$P = \frac{A}{t}$$

замјеном познатих величина у овај израз добија се да је:

$$P = \frac{30000 \text{ J}}{300 \text{ s}} = 0.1 \text{ kW}.$$

Задатак 2 (3 бода)

Авион боинг 767 се креће праволинијски брзином 250 m/s и одржава ову брзину захваљујући два мотора који стварају силу потиска од 197 kN, која дјелује у смјеру кретања тијела. Колико треба да износи снага мотора како би се могла постићи ова брзина?

Рјешење:

Прво претварамо јединице у јединице СИ система ($F = 197 \text{ kN} = 197 \times 10^3 \text{ N}$)

Уколико је сила која врши рад константног интензитета, снага се дефинише као скаларни производ вектора силе која врши рад и брзине у посматраном тренутку. Сила потиска дјелује у смјеру кретања тијела, а самим тим и у смјеру брзине. Пошто се тијело креће праволинијски, угао између ова два вектора износи 0° , из чега слиједи да је $\cos\theta = 1$:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos\theta = Fv$$

$$P = 197 \times 10^3 \text{ N} \cdot 250 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 49,3 \text{ MW}$$

Задатак 3 (5 бодова)

Моторни чамац се креће брзином 72 km/h. Његов мотор при томе развија снагу 80 kW. Колика је вучна сила мотора:

- ако је његов степен корисног дејства 1,0?
- ако је његов степен корисног дејства 0,9?

Рјешење:

Прво претварамо јединице у јединице СИ система ($v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}, P = 80 \text{ kW} = 80 \times 10^3 \text{ W}$).

Степен корисног дејства представља однос искориштене и уложене снаге:

$$\eta = \frac{P_k}{P_u}$$

А у овом случају значи да је 1 тј. 100%, односно да је сва уложена снага уједно и корисна.

Користећи израз за снагу из претходног задатка (уложену снагу):

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos\theta = Fv$$

Може се одредити вучна сила мотора:

$$F = \frac{P_k}{v} = \frac{8 \times 10^4 \text{ W}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 40 \text{ kN}$$

б) У овом случају степен корисног дејства је 0,9 односно 90% што значи да важи: $P_k = \eta P_u$, те се замјеном у претходни израз добија:

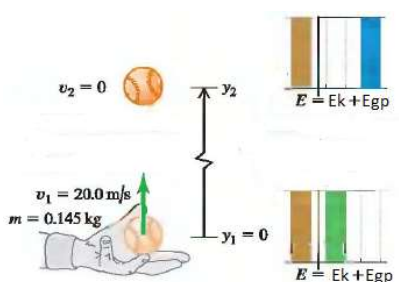
$$F = \frac{P_k}{v} = \frac{0,9 \cdot 8 \times 10^4 \text{ W}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 36 \text{ kN}$$

Задатак 4 (5 бодова)

Лопта масе 0,145 kg је бачена почетном брзином од 20 m/s.

а) До које висине ће доспјети лопта, ако се занемари отпор ваздуха?

б) Колики ће рад извршити лопта при свом кретању навише?

Рјешење:

а) Једина сила која дјелује на лопту је гравитациона сила. Отпор ваздуха је занемарљив, тако да не постоји дјеловање неконзервативне силе те важи закон о одржању механичке енергије система. Референтни ниво оријентишемо у положај одакле је лопта бачена. Узећемо двије карактеристичне тачке за разматрање механичке енергије система. Прва се налази у положају одакле је тијело бачено, а друга у положају у којем тијело достиже максималну висину. Из положаја одакле је тијело бачено, тијело има само кинетичку енергију, јер има почетну брзину, а гравитациона потенцијална енергија система је једнака нули, јер се тијело налази на референтном нивоу ($y_1=0$):

$$E_1 = E_{k1} + E_{gp1} = \frac{1}{2} m v_1^2$$

У положају у којем тијело достиже максималну висину, систем има само гравитациону потенцијалну енергију, док је кинетичка енергија једнака нули, јер тијело у том положају тренутно мирује:

$$E_2 = E_{k2} + E_{gp2} = mgy_2$$

Дакле, приликом лета кинетичка енергија тијела у потпуности се претвара у гравитациону потенцијалну енергију система:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_{k1} = E_{gp2} \text{ односно } \frac{1}{2} m v_1^2 = mgy_2$$

Из чега слиједи да је висина до које лоптица доспијева једнака:

$$y_2 = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{mg} = \frac{v_1^2}{2g} = 20,4m$$

Једначина коју смо добили, у потпуности одговара једначини за максималну висину хица на горе, изведеној из једначина за кинематику праволинијског кретања са константним убрзањем.

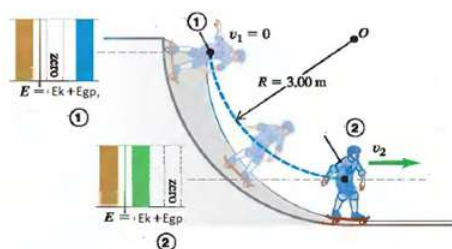
б) При кретању навише лопта ће извршити рад на савлађивању гравитационе силе:

$$A = F \cdot h = mgh = 0,145kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 20,4m = 29N \cdot m = 29J$$

Дакле, извршени рад једнак је гравитационој потенцијалној енергији коју тијело има на висни h.

Задатак 5 (5 бодова)

Скејтер, чија је маса заједно са скејтбордом 75 kg се спушта низ рампу полупречника 3 m. Рампа има облик четвртине круга и трење између ње и скејтборда се може занемарити. Колика је брзина скејтера на крају рампе?

Рјешење:

Код криволинијског као и код праволинијског кретања важи закон одржања механичке енергије, јер потенцијална енергија не зависи од путање тијела, већ његовог тренутног положаја у односу на референтну тачку. Када је сила трења занемарљива, на тијело (скејтборд + скејт) дјелује поред гравитационе силе и нормална сила. Укупна механичка енергија система се не троши. У положају 1 (на врху рампе), кинетичка енергија је једнака нули:

$$E_1 = E_{k1} + E_{gp1} = E_{gp1} = mgy = mgR$$

У тачки 2, потенцијална енергија је једнака нули, јер се тијело налази у нивоу референтне тачке:

$$E_2 = E_{k2} + E_{gp2} = E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Тражена брзина у овој тачки се може добити из закона о одржању механичке енергије:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m}} = 7,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Иста брзина би се добила, и ако би се тијело пустило да пада са висине од 3 m код слободног пада. Добијени резултат је независан од масе тијела. Ово важи само у случају када је трење занемарљиво.

Задатак 6 (4 бода)

Граната лети у хоризонталном правцу брзином 15 m/s и при експлозији се распадне на два дијела чије су масе 0,5 kg и 1kg. Интензитет вектора брзине већег дијела гранате износи 30 m/s, а правци кретања дијелова гранате се поклапају са првобитним правцем кретања гранате. Колики је интензитет вектора брзине мањег дијела гранате и како је усмјерен овај вектор?

Рјешење:

Према закону одржања импулса импулс система прије судара $\vec{p}$ мора бити једнак импулсу система након судара $\vec{p}'$. $\vec{p} = \text{const}$

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

Ако са $\vec{v}$ означимо брзину гранате прије судара, а са $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ брзину дијела гранате m_1 и m_2 , респективно може се записат:

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Претпоставимо ли да су се након судара дијелови гранате кретали у супротним смјеровима, при чему се смјер вектора брзине већег дијела гранате поклаша са смјером гранате, а мањег дијела гранате је супротног смјера

једначина се своди на скаларани облик:

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 - m_2v_2$$

Одавде је

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)v + m_2v_2}{m_1} = 15 \frac{m}{s}$$

На основу позитивне вриједности брзине закључујемо да је добро претпостављен смјер вектора брзине.

Задатак 7 (5 бодова)

На тијело масе 1 kg дјелује стална сила интензитета 10 N. Колика је кинетичка енергија тијела по истеку 10 s од почетка дејства силе?

Рјешење:

Кинетичка енергија тијела дата је изразом:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

уједно је једнака раду који изврши сила за вријеме од 10 s. Како је рад силе дат изразом:

$$A = F \cdot s$$

а сила позната величина потребно је одредити пређени пут. Тијело се креће равномерно-убрзано (по услову задатка је $v_0 = 0$), па је:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

Користећи израза за II Њутнов закон замјеном наведених величина у израз за рад добија се:

$$A = E_k = F \cdot \frac{at^2}{2} = F \cdot \frac{\frac{F}{m}t^2}{2} = \frac{F^2t^2}{2m} = \frac{(10N)^2(10s)^2}{2 \cdot 1kg} = 5000J = 5kJ$$

Задатак 8 (5 бодова)

Тијело масе 100 g пада са висине 80 m.

- Колику ће брзину тијело имати при удару о тло?
- Колика ће бити његова кинетичка енергија при удару о тло?

Рјешење:

а) На ово кретање може се примјенити закон одржања механичке енергије посматрајући положај тијела у почетном (означићемо са 1) и крајњем тренутку (2) може се записати:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_{p1} = E_{k2} \text{ односно } \frac{1}{2}mv_2^2 = mgy_1$$

Одавде је:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s} \cdot 80m} = 39,6 \frac{m}{s}$$

б) Кинетичка енергија тијела у овом тренутку износи:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 = 78,05J$$

Задатак 9 (3 бода)

Клизач на леду креће се угаоном брзином 11 rad/s са раширеним рукама, а затим спусти руке уз тијело смањујући свој момент инерције 8 пута. Колика је крајња угаона брзина клизача, ако је трење занемарљиво?

Решење:

Пошто је трење занемарљиво задатак се рјешава примјеном закона одржања момента импулса:

$$L = I \cdot \omega = \text{const} ,$$

односно

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

Изражавањем угаоне брзине из претходног израза и примјењујући услов задатака ($I_1 = 8I_2$) добија се:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1 = 8 \cdot 11 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 88 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Дакле, крајња угаона брзина се повећала 8 пута јер се момент инерције смањио 8 пута.

Задатак 10 (3 бода)

Тијело масе 5 kg креће се транслаторно брзином 4 m/s . Колики је рад силе кочења потребан да се ово тијело заустави?

Решење:

Рад који се врши при кочењу једнак је промјени кинетичке енергије тијела (брзина се мијења од 4 m/s до 0 m/s када се тијело заустави):

$$A = \Delta E_k = E_k - E_{k_0} = E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{5 \text{ kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 40 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = 40 \text{ J}$$

Задатак 11 (3 бода)

Тијело масе 2 kg креће се транслаторно брзином 5 m/s . Колику кинетичку енергију посједује ово тијело?

Решење:

По дефиницији кинетичка енергија транслаторног кретања је:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{2 \text{ kg} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 25 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 25 \text{ N} \cdot \text{m} = 25 \text{ J}$$

5.2.1.4 Механика флуида

Задатак 1 (3 бода)

Хидростатички притисак воде, измјерен на дну језера износи 150 kPa. Ако је густина воде 1000 kg/m³ колико је дубоко језеро?

Рјешење:

Прво је потребно kPa претворити у Pa ($p=150 \text{ kPa}=15 \times 10^4 \text{ Pa}$).

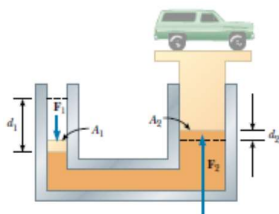
Хидростатички притисак је резултат тежине течности и представља притисак којом течност дјелује на зидове суда и на тијела потопљена у њу. Представља количник тежине течности и површине на коју дјелује: $p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Vg}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh$

Одавде је тражена висина:

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{15 \times 10^4 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 15.29 \text{ m}$$

Задатак 2 (3 бода)

Клип површине 0,5 dm² затвара посуду у којој се налази течност. Ако је хидростатички притисак 1 МПа колика сила дјелује на клип?

**Рјешење:**

Прво је потребно дате јединице претворити у јединице интернационалног система ($S=0.5 \text{ dm}^2=0.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2=5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $p=1 \text{ МПа}=1 \times 10^6 \text{ Pa}$).

По дефиницији притисак је сила која дјелује по јединици површине тј. $p = \frac{F}{S}$

Одавде је

$$F = p \cdot S = 10^6 \text{ Pa} \cdot 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}$$

Задатак 3 (5 бодова)

Хидраулична преса има чепове радијуса 20 cm и 40 cm. Ако је сила која дјелује на мањем чепу 15 N, колика сила дјелује на већем чепу?

Рјешење:

Прво се радијуси чедова морају изразити у јединицима СИ система ($r_1=20\text{cm}=0,2\text{m}$, $r_2=40\text{cm}=0,4\text{m}$). Како на оба чепа дјелује исти притисак:

$$p_1 = p_2$$

у складу са Паскаловим законом може се написати:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Изражавањем површина чедова преко познатих радијуса $S_1 = r_1^2 \pi$, $S_2 = r_2^2 \pi$, и замјеном у претходни израз добија се да је сила која дјелује на други чеп:

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot S_2}{S_1} = \frac{F_1 \cdot r_2^2 \pi}{r_1^2 \pi} = \frac{15\text{N} \cdot (0,4\text{m})^2}{(0,2\text{m})^2} = 60\text{N}$$

Задатак 4 (3 бода)

Цијев у облику латиничног слова У садржи уље густине 700 kg/m^3 . Ако је разлика између два нивоа 10 cm колика је разлика притисака у тим тачкама?

Рјешење:

Разлика притисака у цијеви јавља се услед висинске разлике на посматраним висинама па се може записати:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h_1 - \rho g h_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g \Delta h = 700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1\text{m} = 686,7 \text{ Pa}$$

Задатак 5 (5 бодова)

Комад материјала запремине 500 cm^3 и густине 300 kg/m^3 плива на води. Ако тијело притиснемо руком да потпуно утоне у воду:

- Коликом силом потиска вода дјелује на тијело?
- Коликом силом треба дјеловати на тијело да би оно мировало испод површине воде? Густина воде износи 1000 kg/m^3 .

Рјешење:

- Прво је неопходно запремину тијела претворити у m^3 :

$$V = 500 \text{ cm}^3 = 500 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Силу потиска одредићемо користећи Архимедов закон према коме на свако тијело потопљено у флуид дјелује сила потиска једнака тежини истиснуте течности:

$$F_v = Q_v = mg = \rho V g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,9 \text{ N}$$

- Да би уроњено тијело мировало испод површине воде неопходно је дјеловати силом која претставља резултанту силе потиска воде и тежине уроњеног тијела:

$$R = F_v - Q_t = F_v - \rho_t V g = 4,9 \text{ N} - 300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,43 \text{ N}$$

Задатак 6 (5 бодова)

Којом брзином истиче вода из цијеви која лежи 2 m испод њеног нивоа. Вода се налази у

затвореном суду, а притисак на површини течности износи $1,1 \cdot 10^5$ Pa. Спољашњи притисак износи 101 kPa, а густина воде 1000 kg/m^3 .

Рјешење:

Брзина течности може се одредити из Бернулијеве једначине континуитета на два пресека

$$\text{цијеви: } p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

гдје је први ниво слободна површина течности на ширем пресеку. Пошто је површина попречног пресека на првом нивоу много већа од површине на другом нивоу брзина истицања течности је мала тако да се може занемарити ($v_1 \approx 0$). Нулти (референтни) ниво за мјерење течности једног и другог нивоа је други ниво тако да је његова висина ($h=0$). Примјеном услова на Бернулијеву једначину добија се:

$$p_1 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Одавде се коначно добија брзина истицања течности:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2gh} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,55 - 1,01) \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} + 2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}} = 4,68 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Задатак 7 (3 бода)

Којом брзином истиче вода из цијеви цилиндричног резервоара која лежи на 1 m испод нивоа течности у резервоару, ако је полупречник цијеви много мањи од полупречника резервоара?

Рјешење:

Брзина течности може се одредити примјеном Бернулијеве једначине континуитета на два пресека цијеви која се односи на истицање течности из широког суда кроз отвор малог пресека (Торичелијева теорема):

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

гдје је први ниво слободна површина течности на ширем пресеку. Пошто је површина попречног пресека на првом нивоу веома велика брзина истицања течности је мала тако да се може занемарити ($v_1 \approx 0$). Притисак на једном и на другом отвору је атмосферски притисак па према томе исти је на оба пресека. Нулти (референтни) ниво за мјерење течности једног и другог нивоа је други ниво тако да је његова висина ($h=0$). Примјеном наведеног на Бернулијеву једначину добија се:

$$p + \rho gh_1 = p + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Одавде се коначно добија:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m}} = 4,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

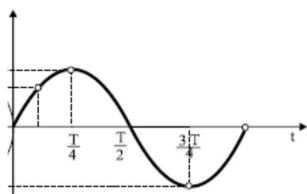
Видимо да је брзина истицања течности једнака брзини кретања тијела при слободном паду.

5.2.1.5 Осцилације

Задатак 1 (3 бода)

Колико времена треба хармонијском осцилатору да стигне од једног до другог амплитудног

положаја ако је његова фреквенција 50 Hz? Приказати на графику зависности елонгације од времена.



Решење:

Вријеме које је потребно хармонијском осцилатору да стигне од једног до другог амплитудног положаја представља половину периода осциловања T (види слику). Период осциловања повезан је са фреквенцијом изразом:

$$T = \frac{1}{f} = 0.02\text{s}$$

одакле је тражено вријеме:

$$t = \frac{T}{2} = 0.01\text{s}$$

Задатак 2 (3 бода)

Ако једна осцилација касни за другом за $\pi/2$ колико износи временско кашњење?

Решење:

Једна пуна осцилација одговара фазном помаку од 2π , а вријеме за које се то деси је период T . У задатку се тражи колики временски интервал одговара фази $\pi/2$. Дакле, можемо поставити пропорцију:

$$2\pi : T = \frac{\pi}{2} : t$$

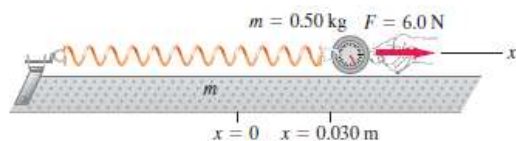
Одавде је:

$$t = \frac{T \cdot \frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{T}{4}$$

Овај резултат се може очитати и са графика у претходном задатку.

Задатак 3 (5 бодова)

Тијело масе 0.5kg је окачено о опругу и извучено из равнотежног положаја под дјеловањем силе од 6N за 0.03m , а затим пуштено да осцилује. Колико износи константа еластичности опруге, фреквенција и кружна фреквенција, као и период осцилација? Трење о подлогу је занемарљиво.



Рјешење:

Код хармонијског осциловања релативна сила пропорционална је отклону тијела из равнотежног положаја:

$$F_x = -kx$$

гдје $k(N/m)$ представља константу еластичности опруге. С обзиром да релативна сила која настоји врати тијело у равнотежни положај зависи од удаљености од њега(x), њен интензитет варира. Што је тијело удаљеније од равнотежног положаја на њега дјелује већа сила. Почетак координатног система је оријентисан у тачки у којој се налази равнотежни положај тијела. Тијело је помјерено за $+0.03\text{ m}$ у смјеру позитивног краја x осе, релативна сила ће бити усмјерена супротно, тј ка негативном крају x осе (предзнак минус) или ка равнотежном положају. Уколико би се тијело под дјеловањем силе помјерило ка негативном дијелу x осе, рецимо за -0.03 m , а затим пустило да осцилује, сила би била усмјерена ка позитивном крају x осе (предзнак плус) или опет ка равнотежном положају. Константа еластичности из горње једначине једнака је:

$$k = \frac{-F_x}{x} = \frac{-(-6\text{ N})}{0.03\text{ m}} = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Кружна фреквенција је величина која повезује осцилаторно кретање и кружно кретање и јединица је rad/s :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.5\text{ kg}}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Фреквенција представља физичку величину која показује колико осцилација тијело направи у јединици времена и повезана је са кружном фреквенцијом преко релације:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \cdot 3.14} = 3.2\text{ Hz}$$

Што значи да тијело направи 3.2 осцилације у једној секунди. Период осциловања представља вријеме које је потребно да се направи једна пуна осцилација и повезана је са фреквенцијом преко релације:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{3.2\text{ Hz}} = 0.31\text{ s}$$

Из горње једначине се види да период осциловања тијела зависи од његове масе и константе еластичности опруге, а не од тога за колико је тијело помјерено из равнотежног положаја.

Задатак 4 (3 бода)

Тег масе 1 kg окачен је на опругу константе еластичности 100 N/m . Одредити број осцилација које у јединици времена направи тег.

Рјешење:

Број осцилација у јединици времена представља фреквенцију осциловања f која је са кружном фреквенцијом повезана изразом $\omega = 2\pi \cdot f$, а кружна фреквенција хармонијског осцилатора се може израчунати преко константе еластичности и масе утега преко израза:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Замјеном познатих величина у претходни израз добија се:

$$\omega = \sqrt{\frac{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{1\text{ kg}}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Тако да ће тражени број осцилација у јединици времена бити:

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{10 \frac{rad}{s}}{2 \cdot 3,14 rad} = 1,59 Hz$$

Задатак 5 (3 бода)

Клатно има дужину 20 cm. Колико приближно износи његов период осциловања?

Рјешење:

Претпостављајући да се клатно креће као математичког клатно за одређивање периода може се користити израз:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

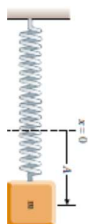
Даље де директном замјеном величина ($l=20\text{cm}=0,2\text{m}$) добија период осциловања клатна:

$$T = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,2m}{9,81 \frac{m}{s^2}}} = 0,89s$$

Задатак 6 (7 бодова)

Тег масе 0,5 kg виси о еластичној опрузи коју истеже за 7 cm. Одредити:

- кржну фреквенција осциловања;
- период осциловања.
- колика је кинетичка енергија осцилатора при проласку кроз равнотежни положај, ако је његова укупна енергија 6 J?

**Рјешење:**

- Кржна фреквенција и период осциловања дати су изразима:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Да бисмо могли одредити ове величине прво је потребно израчунати константу еластичности опруге. Тежина тијела дјелује на тег наниже, а реституциона (еластична) сила навише тако да се може записати:

$$mg = kx \Rightarrow \kappa = \frac{mg}{x} = \frac{0,5kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{0,07m} = 70 \frac{N}{m}$$

б)

$$w = \sqrt{\frac{70 \frac{N}{m}}{0,5kg}} = 11,83 \frac{rad}{s}, T = \frac{2\pi}{w} = 0,53s$$

в) Укупна енергија хармонијског осцилатора једнака је збиру кинетичке и потенцијалне енергије.

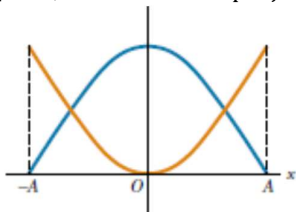
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

гдје је m маса хармонијског осцилатора, v брзина којом се креће, а x удаљеност од равнотежног положаја.

Уколико осцилатор врши слободне осцилације важи закон одржања механичке енергије.

Из последњег израза видимо да када честица пролази кроз равнотежни положај њена кинетичка енергија је максимална (плава линија на графику) јер је њена потенцијална енергија једнака нули (жута линија на графику), а када се честица нађе у амплитудном положају њена потенцијална енергија је максимална, а њена кинетичка енергија је 0.

Дакле, кинетичка енергија честице у равнотежном положају је 6 J.



Задатак 7 (3 бода)

Број осцилација у једној минути износи 180. Колики су: а) фреквенција, б) период овог осциловања?

Рјешење:

а) Из услова задатка одређује се фреквенција осциловања као број осцилација у јединици времена:

$$\nu = \frac{180}{1 \text{ min}} = \frac{180}{60s} = 30 \frac{1}{s} = 30 \text{ Hz}$$

б) Период осциловања је једнак реципрочној вриједности фреквенције: $T = \frac{1}{\nu} = 0,033s$

Задатак 8 (3 бода)

Клатно направи 30 осцилација у минути. Колико износи: а) период осциловања? б) вријеме између два узастопна амплитудна положаја ?

Рјешење:

а) Из услова задатка одређује се фреквенција као број осцилација у јединици

времена: $\nu = \frac{30}{1 \text{ min}} = \frac{30}{60s} = \frac{1}{2s} = 0,5 \text{ Hz}$

а период је: $T = \frac{1}{\nu} = 2s$

б) Вријеме између два амплитудна положаја једнако је половини периода $T/2$.

Задатак 9 (3 бода)

Ако се брзина кретања хармонијског осцилатора смањи два пута како ће се промијенити његова кинетичка енергија?

Рјешење:

Према услову задатка $v_2 = \frac{v_1}{2}$, а како је $E_k = \frac{mv^2}{2}$

добива се: $\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{mv_2^2}{2}}{\frac{mv_1^2}{2}} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{\left(\frac{v_1}{2}\right)^2}{v_1^2} = \frac{1}{4}$, дакле E_k се смањи 4 пута.

5.2.1.6 Геометријска оптика

Задатак 1 (3 бода)

Колики је индекс преламања средине, ако се свјетлост кроз њу простира брзином $2,22 \times 10^8 \text{ m/s}$?

Рјешење:

Индекс преламања средине n представља однос брзине свјетлости у вакууму и брзине свјетлости у тој средини тј. $n = \frac{c_0}{c_1}$

Како је брзина свјетлости у вакууму $c_0 = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, замјеном у претходни израз добија се да је индекс

преламања средине $n = \frac{c_0}{c_1} = \frac{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,22 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,35$

Задатак 2 (3 бода)

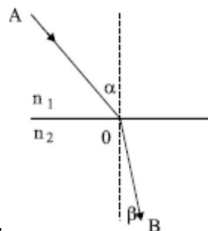
Свјетлосни зрак из ваздуха пада на планпаралелну плочицу под углом 60° . Ако је брзина свјетлости у плочици $2 \times 10^8 \text{ m/s}$, а брзина свјетлости у ваздуху $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ израчунати угао под којим се свјетлост прелама у води.

Рјешење:

Преломни угао β (види слику) одређује се из закона преламања свјетлости према коме је:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta.$$

Пошто је брзина свјетлости у ваздуху приближно једнака брзини свјетлости у вакууму индекс преламања ваздуха је $n_1 \approx 1$, а индекс преламања плочице који је непознат одредићемо користећи



начин рјешавања претходног задатка:

$$n_2 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 1,5$$

Даље се из закона преламања свјетлости добија:

$$\sin \beta = \frac{1}{n_2} \sin \alpha,$$

односно:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{n_2} \sin \alpha\right) = 35'26''$$

Задатак 3 (5 бодова)

Конкавно огледало је полупречника кривине 20 cm. Одредити рачунским и графичким путем положај, тип и увећање када је удаљеност предмета од огледала је 30 cm.

Рјешење:

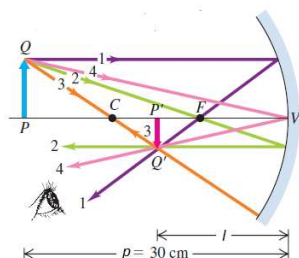
С обзиром да се центар закривљености код конкавног огледала налази испред огледала, вриједности f и p су позитивне у једначини огледала. Жижина даљина f једнака је половини полупречника закривљености:

$$f = \frac{R}{2} = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}$$

Растојање предмета од тјемена огледала је позитивно што значи да је оно смјештено испред огледала. Тражено растојање lika од огледала ће износити:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{p-f}{fp} \Rightarrow l = \frac{fp}{p-f}$$

$$l = \frac{10 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}}{30 \text{ cm} - 10 \text{ cm}} = 15 \text{ cm}$$



Пошто је $l > 0$, лик је реалан и налази се испред огледала. Увећање добијеног лика износи:

$$U = -\frac{l}{p} = -\frac{15\text{cm}}{30\text{cm}} = -\frac{1}{2}$$

Како је $|U| = \frac{1}{2}$ закључујемо да је лик два пута мањи од предмета, а из знака увећања ($U < 0$) слиједи да је лик обрнут.

За добијање лика графичким путем довољно је конструисати лика помоћу два карактеристична зрака, а приказ свих карактеристичних зрака је дат на слици.

Задатак 4 (5 бодова)

Конкавно огледало је полупречника кривине 20 cm. Одредити рачунским и графичким путем положај, тип и увећање када је удаљеност предмета од огледала 20 cm.

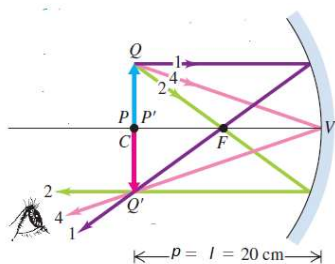
Рјешење:

Предмет је смјештен тачно у центар закривљености. Тражено растојање лика од огледала ће износити:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{fp}{p-f} \Rightarrow l = \frac{10\text{cm} \cdot 20\text{cm}}{20\text{cm} - 10\text{cm}} = 20\text{cm}$$

Добијена слика предмета има удаљеност од тјемена огледала која је позитивна, што значи да се налази испред огледала и да је добијени лик реалан. Увећање добијеног лика износи:

$$u = -\frac{l}{p} = -\frac{20\text{cm}}{20\text{cm}} = -1$$

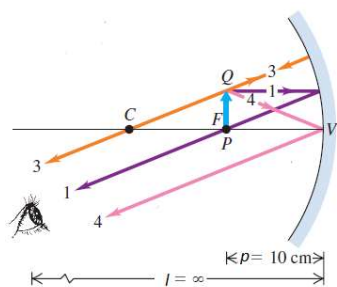


Добијени лик предмета је исте величине као и предмет и обрнут је у односу на њега.

Задатак 5 (5 бодова)

Конкавно огледало је полупречника кривине 20cm. Одредити рачунским и графичким путем положај, тип и увећање када је удаљеност предмета од огледала 10 cm.

Рјешење:



Предмет је смјештен тачно у жижу огледала. Тражено растојање lika од огледала ће износити:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{fp}{p-f} \Rightarrow l = \frac{10\text{cm} \cdot 10\text{cm}}{10\text{cm} - 10\text{cm}} = \infty$$

Лик се неће формирати јер се налази на бесконачној удаљености. Његово увећање ће такође бити бесконачно:

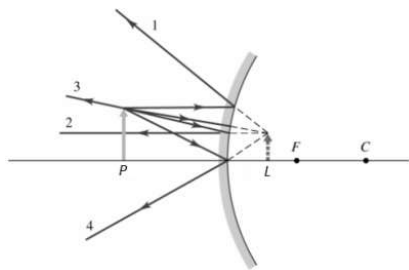
$$u = -\frac{l}{p} = -\frac{\infty\text{cm}}{20\text{cm}} = -\infty$$

Приликом графичког представљања у овом случају зрак који пролази кроз жижу се не може нацртати јер се не одбија од огледала. Зраци који се одбијају од огледала су паралелни и неће се сјести, тако да се неће моћи формирати лик, што одговара добијеном рјешењу да се лик налази на бесконачној удаљености.

Задатак 6 (5 бодова)

Предмет је смјештен испред конвексног огледала на удаљености од 16,5 cm. Полупречник закривљености конвексног огледала износи 22 cm. Одредити рачунским путем положај, тип и увећање одбијеног lika. Графички конструисати добијени лик.

Рјешење:



Код конвексног огледала центар закривљености налази се иза огледала. Што значи да ће код конвексног огледала жижина даљина и полупречник закривљености увјек бити негативни. Жижина даљина је једнака половини полупречника закривљености:

$$f = \frac{R}{2} = \frac{-22\text{cm}}{2} = -11\text{cm}$$

Предмет је постављен испред конвексног огледала, што значи да је његова удаљеност позитивна. Добијени lika ће бити на удаљености од тјемена огледала:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{fp}{p-f} \Rightarrow l = \frac{(-11\text{cm}) \cdot 16.5\text{cm}}{16.5\text{cm} - (-11\text{cm})} = -6.6\text{cm}$$

Добијено растојање је негативно што значи да је добијени лик имагиран и да се налази иза огледала. Увећање добијеног лика износи:

$$u = -\frac{l}{p} = -\frac{-6.6\text{cm}}{1\text{cm}} = 0.6$$

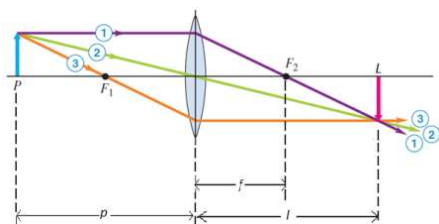
Добијени лик има исту оријентацију као и предмет, што значи да је усправан. Добијено увећање је мање од 1, што значи да је лик умањен.

Зраци који се одбијају од огледала се разилазе и не формирају лик испред огледала. За конструисање лика битни су продужени одбијених зрака који се цртају непрекиданим линијама. Продужени одбијених зрака сјеку се у тачки која се налази иза огледала, па ће добијени лик бити имагинаран. Као и код конкавног огледала довољно је нацртати два зрака, како би се могао конструисати лик. Рачунским, а и графичким путем се може проверити да добијени лик предмета код конвексног огледала је увек имагинаран, усправан и умањен.

Задатак 7 (5 бодова)

Предмет се налази испред биконвексног сочива на удаљености од 40 cm. Жижина даљина сочива износи 20 cm. Одредити тип, положај и увећање добијеног лика предмета.

Рјешење:



Једначина која опсује, како сабирна тако и расипна сочива гласи:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l} + \frac{1}{p}$$

Код сочива, као и код огледала, за конструкцију ликова користе се карактеристични зраци. Конструкција лика код сабирног сочива врши се помоћу следећих карактеристичних зрака:

- 1) Први карактеристични зрак паралелној оптичкој оси после преламања у сочиву пролази кроз жижу лика
- 2) Други карактеристични зрак који пролази кроз центар сочива наставља пут без преламања
- 3) Трећи карактеристични зрак који пролази кроз жижу предмета после преламања наставља пут паралелно оптичкој оси

Приликом рачунског одређивања тражених величина код сабирних и распиних сочива, треба поштовати следећа правила:

$l > 0$ – ако се лик предмета налази иза сочива, из разлога што се свјетлост прелама код сочива, па је за очекивати да се лик добије иза сочива, за разлику од огледала код којег се зраци одбијају (реални)

$l < 0$ – ако се лик предмета налази испред сочива (имагинарни)

$f > 0$ – ако се жижа кроз коју пролазе преломљени зраци налази иза сочива (сабирна)

$f < 0$ – ако се жижа кроз коју пролазе продужени преломљених зрака налази испред сочива (расипна)

$u > 0$ – ако лик има исту оријентацију као и предмет

$u < 0$ – ако лик има обрнуту оријентацију у односу на предмет

С обзиром да се предмет налази испред сочива, удаљеност ће бити позитивна. Код сабирног сочива преломљени зраци пролазе кроз жижу, која се налази иза сочива, тако да ће жижина даљина бити позитивна. Удаљеност лика ће износити:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow l = \frac{fp}{p-f}$$

$$l = \frac{20\text{cm} \cdot 40\text{cm}}{40\text{cm} - 20\text{cm}} = 40\text{cm}$$

Добијена вриједност је позитивна, што значи да се добијени лик налази иза сочива. С обзиром да се лик налази иза сочива, добијени лик је реалан, јер се зраци преламају кроз сочива и за очекивати је да ће се лик налази иза сочива. Увећање лика износи:

$$u = -\frac{l}{p} = -\frac{40\text{cm}}{40\text{cm}} = -1$$

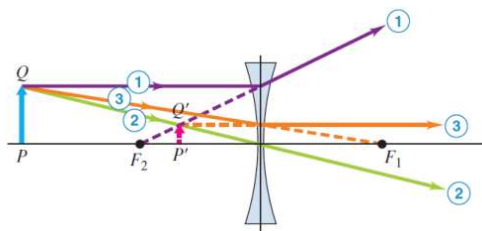
Што значи да је добијени лик исте величине као и предмет и да има обрнуту оријентацију у односу на предмет.

Код сабирних сочива важе иста правила, како и код конкавних огледала: а) ако се предмет постави на удаљеност која је већа од жиине даљине, лик који ће се добити је реалан и обрнут, б) уколико се предмет постави у жижу сочива која се налази испред, лик се неће формирати, јер преломљени зраци ће бити паралелни и неће се сјести у једној тачки, ц) уколико се предмет постави на удаљеност мању од жијине даљине, добије лик ће бити имагинаран, усправан и увећан.

Задатак 8 (5 бодова)

Жијина даљина биконкавног сочива износи 20 см. Добијени лик предмета има увећање 1/3. На којој удаљености се налази предмет, а на којој добијени лик?

Рјешење:



Карактеристични зраци који се користе за конструкцију лика код расипног сочива су следећи:

- 1) Први карактеристични зрак паралелан оптичкој оси, прелама се тако да његов продужетак пролази кроз жижу F_2 .
- 2) Други карактеристични зрак који пролази кроз центар сочива се не прелама.
- 3) Трећи карактеристични зрак који наилази на сочиво у правцу чији геометријски продужетак пролази кроз жижу F_1 после је преламања наставља свој пут паралелно оптичкој оси.

Код конструисања ликова код расипних сочива битни су продужеци зрака који се преламају. Код расипних сочива жижа кроз коју пролазе продужеци преломљених зрака се налази испред сочива, тако да ће жијина даљина бити негативна. С обзиром да увећање сочива износи:

$$u = -\frac{l}{p} \Rightarrow \frac{1}{3} = -\frac{l}{p} \Rightarrow l = -\frac{p}{3}$$

Добијени израз за растојање лика се може уврстити у једначину за једначину сочива:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-\frac{p}{3}} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{3}{p} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{2}{p} \Rightarrow f = -\frac{p}{2} \Rightarrow p = -2f$$

$$p = -2 \cdot (-20\text{cm}) = 40\text{cm}$$

Удаљеност лика износи:

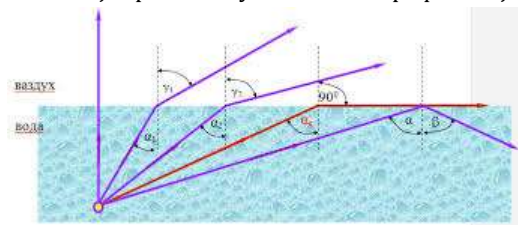
$$l = -\frac{p}{3} = -\frac{40\text{cm}}{3} = -13.3\text{cm}$$

На основу добијених резултата може се закључити да се предмет налази испред биконкавног сочива, а да се добијени лик предмета налази такође испред биконкавног сочива, што значи да је имагиниран.

Као и код конвексних огледала, тако и код расипних сочива, добијени лик предмета је увјек имагинаран, има исту оријентацију као и предмет и умањен је.

Задатак 9 (3 бода)

Колики је гранични угао тоталне рефлексције у води, ако је њен индекс преламања 1,33?



Рјешење:

Ако свјетлост прелази из оптички гушће у оптички рјеђу средину тада је $\beta > \alpha$ (свјетлост се ломи од нормале на површину). При одговарајућем упадном углу преломни угао ће бити прави (90°), а преломљени зрак клизи по граничној површини. За још већи упадни угао преломљени зрак се враћа у исту средину т. Настаје тотална рефлексција, а тај упадни угао је гранични угао α_g . Гранични угао тоталне рефлексције одређује се из закона преламања свјетлости:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Односно

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{тј.} \quad \frac{\sin \alpha_g}{\sin 90} = \sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1}$$

Уколико свјетлост прелази из средине индекса преламања n_1 у вакуум или ваздух претходни израз се своди на облик :

$$\sin \alpha_g = \frac{1}{n_1} = 0,78518$$

Коначно се добија да је угао тоталне рефлексције:

$$\alpha_g = 48^\circ 45'$$

Задатак 10 (3 бода)

Танко сабирно сочиво жижне даљине 10 cm формира лик предмета који се налази на растојању 30 cm испред сочива. На којем растојању од сочива се налази и какав је лик овог предмета?

Рјешење:

сабирно сочиво $f > 0$

Из једначине сабирног сочива добија се положај лика: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{f \cdot p}{p - f} = 15 \text{ cm}$

$l > 0$, лик је реалан

$U = -\frac{l}{p} = -0,5$, лик је умањен два пута,

$U < 0$, лик је окренут

Задатак 11 (3 бода)

Танко сабирно сочиво жижне даљине 10 cm формира лик предмета који се налази на растојању 5 cm испред сочива. На којем растојању од сочива се налази и какав је лик овог предмета?

Рјешење:

За сабирно сочиво $f > 0$

Из једначине сабирног сочива добија се удаљеност лика од сочива $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \frac{f \cdot p}{p - f} = -10 \text{ cm}$

$l < 0$, лик је имагинаран

$U = -\frac{l}{p} = 2$, лик је увећан два пута,

$U > 0$, лик је усправан

Задатак се може ријешити и графичким путем.

Задатак 12 (3 бода)

Брзина свјетлости у течности изнад које се налази ваздух износи $1,5 \times 10^8 \text{ m/s}$. Под којим углом се опажа тотална рефлексија? ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)

Рјешење:

Из услова задатка: $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 1,5 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ одређује се индекс преламања средине: $n = \frac{v}{c} = 2$

Из услова тоталне рефлексије ($n_{\text{vaz}} \approx 1$) добија се угао тоталне рефлексије: $\sin \alpha_g = \frac{1}{n}$ одакле је

$$\alpha_g = \arcsin \frac{1}{n} = 30^\circ$$

5.3 Примјер пријемног испита за СПАРХ



УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
АРХИТЕКТОНСКО-ГРАЂЕВИНСКО-ГЕОДЕТСКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИЈЕМНИ ИСПИТ

Студијски програм
АРХИТЕКТУРА

Школска 2016/2017

САДРЖАЈ

А Математика

Б Перцепција и презентација
простора

Ц Тест опште информисаности

Д Слободноручно цртање

A**МАТЕМАТИКА**

Ријешити дате задатке. Рјешења задатака написати хемијском оловком на овом листу уз текст задатка. Празне печатиране листове у прилогу користити за рад и прорачун и приложити уз тест. За рад користити хемијску оловку.

1. Ријешити неједначину:

$$\frac{x+1}{2x-3} < \frac{2}{3}$$

Рјешење (2 бода):

2. Ријешити једначину:

$$0.5^{3x-4} = \frac{\log 16}{\log 2}$$

Рјешење (2 бода):

3. Ивице правоуглог паралелопипеда (квадра) су $a=9$ cm, $b=7$ cm и $c=10$ cm. За колико треба сваку од њих смањити да се површина тијела смањи за 98 cm²? (3 бода)

Рјешење (3 бода):

4. Наћи једначине тангенти кружнице конструисаних из тачке $M(-4, 3)$ на кружницу $k: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

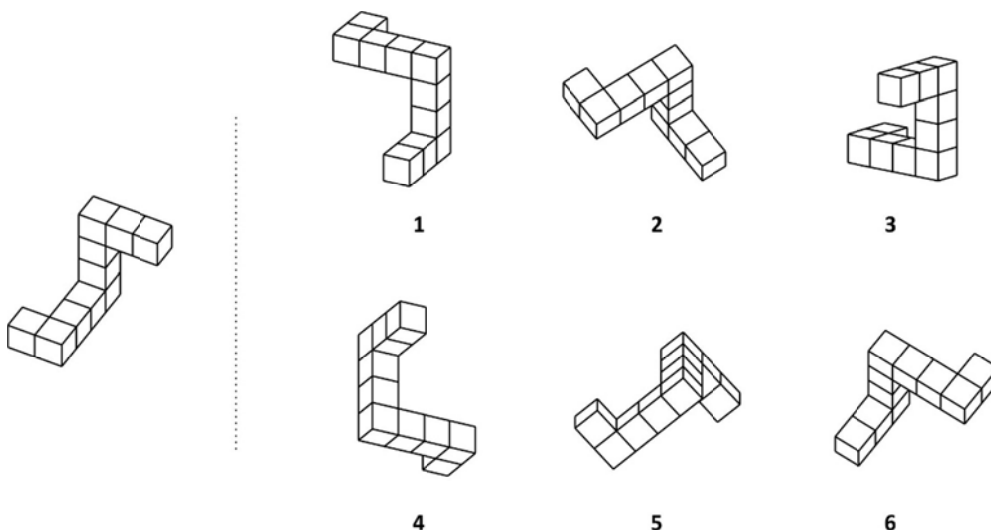
Рјешење (3 бода):

Б

ПЕРЦЕПЦИЈА И ПРЕЗЕНТАЦИЈА ПРОСТОРА

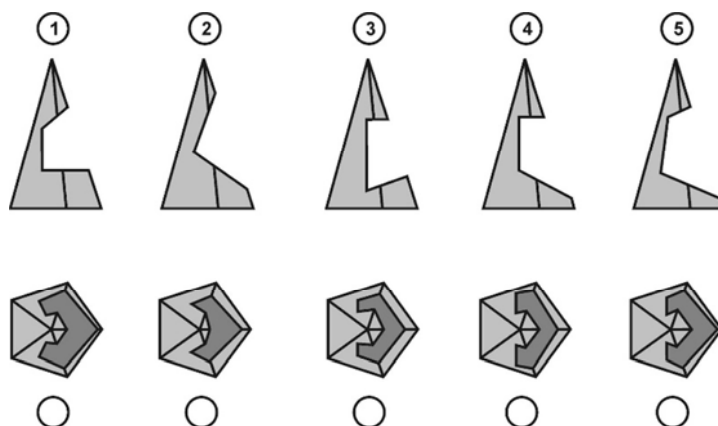
ЗАДАТАК 1 (2 бода)

Који од тијела означених бројевима десно приказује објекат дат лијево, али из другог угла? Заокружити бројеве испод тачних рјешења (постоје два рјешења).



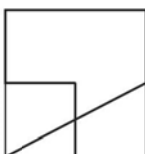
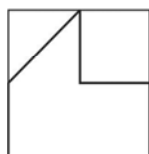
ЗАДАТАК 2 (2 бода)

На слици су дати изгледи пет пирамида из којих су извађени поједини дијелови. На доњем цртежу су дати изгледи одозго. У кружићима уписати број изгледа пирамиде који одговара датом погледу одозго.

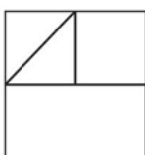


ЗАДАТАК 3 (2 бода)

На слици 1 су дата три положаја савијене жице - поглед одозго и два погледа са стране. Означити прецртавањем редног броја, који се налази поред одговарајућег изгледа, који просторни модел одговара изгледима жице са слике 1.



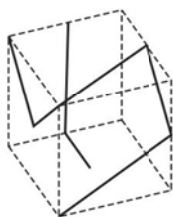
погледи са стране



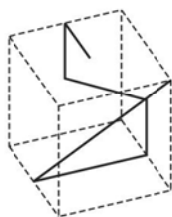
поглед одозго

Слика 1

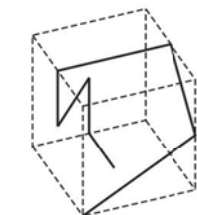
1



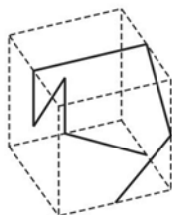
2



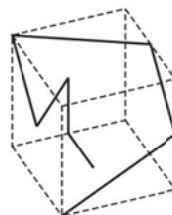
3



4



5



6

ЗАДАТАК 4 (4 бода)

Дати су ваљак и лопта који се међусобно продиру.

На слици 1 треба уцртати како би изгледало тијело уколико би се два тијела сјединила.

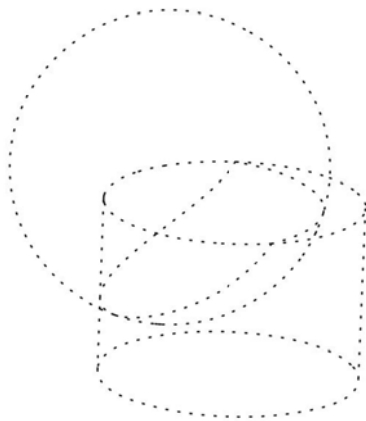
На слици 3 треба уцртати дио тијела који би настао уколико би се од ваљка одузела лопта.

На слици 2 треба уцртати дио тијела који би настао уколико би се од лопте одузео ваљак.

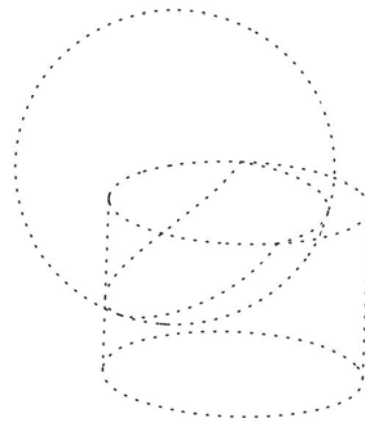
На слици 4 треба уцртати дио тијела који је заједнички за ваљак и лопту.

Приликом рјешавања узети у обзир да је ваљку горњи базис видљив.

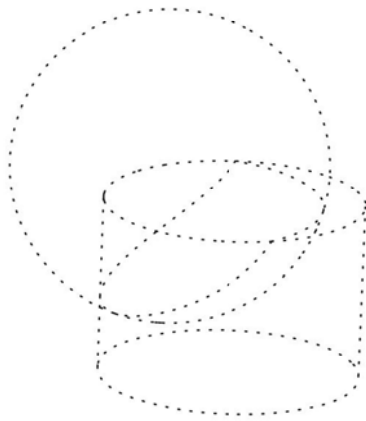
Испрекиданим линијама уцртати невидљиве ивице објекта.



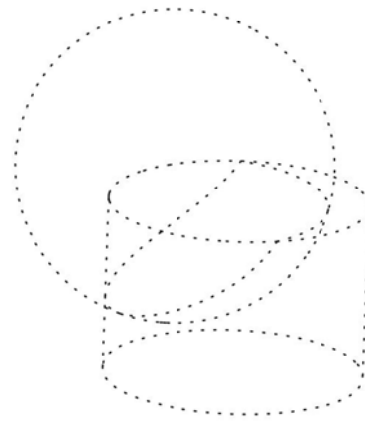
слика 1



слика 2



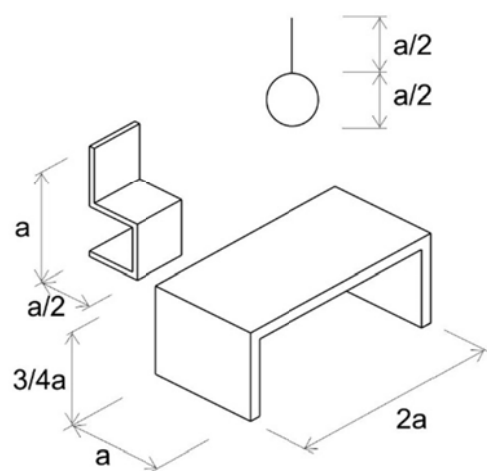
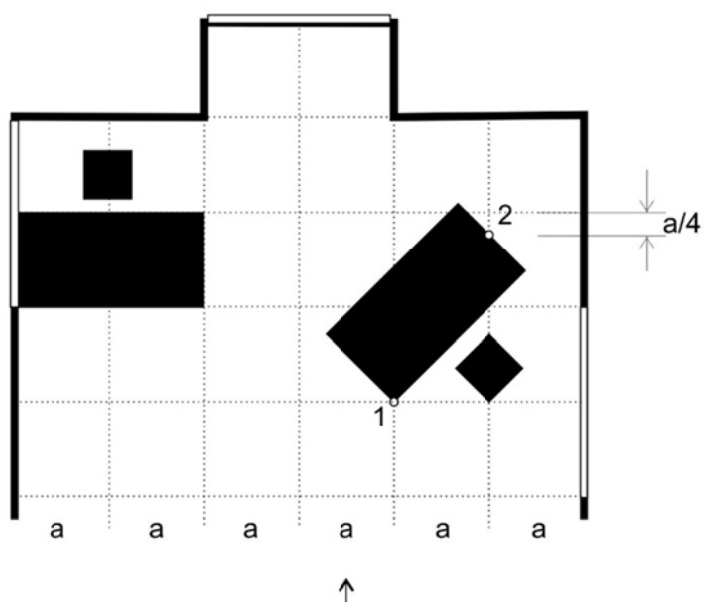
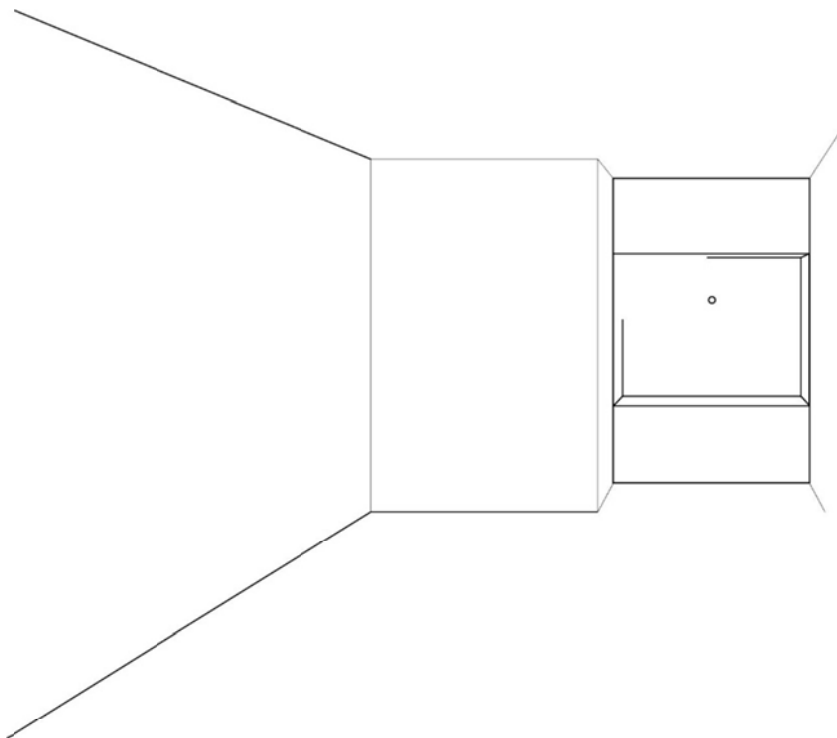
слика 3



слика 4

ЗАДАТАК 5 (5 бодова)

На цртежу доле дата је основа просторије и у њој уцртана диспозиција два стола и двије столице чије су мјере date у скици поред. Доцртајте на горњој скици просторије дати намјештај и прозоре задржавајући њихов распоред и пропорције. Лампа виси у тачки 2.



ЗАДАТАК 6 (5 бодова)

Дат је текст из књиге Ранка Радовића у коме је описана соба. Испод текста кандидат треба да нацрта слику коју је замислио док је читао текст. Циљ овог задатка је да кандидат покаже способност имагинације простора који је описан и понуди своју графичку интерпретацију. Цртеж треба да буде на нивоу брзе скице графитном оловком, а битно је приказати описане елементе и дочарати атмосферу и емоцију коју слика носи. Вријеме за рад је 15 мин.

СОБА КУМА САВЕЉИЋА

Видео сам много соба светом и по књигама, али ме је највише обрадовала и научила велика соба нашега кума Савељића, једноставног сељанина у црногорском селу Мартинићи, до којег се стиже тек што се напусти Спуж и окрену леђа плодној и озелењеној долини реке Зете, пењући се у брда.

Његова је соба пространа, без много намештаја, без украса и без сувишности. Кревети од једрог дрвета постављени су дуж чистих, белих зидова. Средишњи простор остао је тако слободан, подложен променама и стално другачијој употреби тихих укућана. Плафон у дугим талпама, таман и матиран, спуштен до подигнуте руке. Под се жути, али не од боје, него од јасноће дрвета.

Четири су једноставне столице у соби. Усправне, са строгим наслонима, пуне достојанства. Оне бележе велико огледало између два мала прозора отворена према долини и са дрвеним капцима, који су непријатељи летње жеге и ветра са кишама. Уместо стола – непресушна шкриња наслоњена је на зид. Она је велики знак породичног блага, скровиште ткања и дугих бдења, окриље везења и снова!

Ранко Радовић

Простор за рад

ЗАДАТАК 1 (3 бода)

Заокружити један од четири понуђена одговора. (Сваки тачан одговор вриједи 1 бод).

Термин “жељезна завјеса” означава:

- а) фазу процеса производње жељеза
- б) заштиту од гама зрачења
- в) границу између капитализма на западу и комунизма на истоку за вријеме Хладног рата
- г) завјесу од густог плетива са челичним влакнима

Ентазис је:

- а) грчко традиционално предјело
- б) конвексна кривина грчког стуба
- в) први посјед Александра Македонског на територији данашње Македоније
- г) школа архитектуре у античкој Грчкој

Која од наведених боја припада основном спектру боја

- а) зелена
- б) црвена
- в) љубичаста
- г) наранџаста

ЗАДАТАК 2 (2 бода)

Дати одговор на постављено питање. (Сваки тачан одговор вриједи 1 бод).

1. Која архитектица је први женски лауреат Прицкерове награде за архитектуру?

2. Све планете Сунчевог система, осим Земље, су добиле имена по чијим боговима?

ЗАДАТАК 3 (3 бода)

Прочитати текст. Заокружити један од пет понуђених одговора на питања која се тичу текста. (Сваки тачан одговор вриједи 1 бод).

Витрувије сматра да образовање архитеката мора да се састоји из више наука и различитих знања, јер архитекта треба да оцјењује и вриједност дјела која потичу из области других вјештина. Архитектура се састоји из праксе и теорије. Пракса је способност стечена трајном вјежбом. Њоме се, према приложеном нацрту, рукама гради дјело од било које грађе. Теорија је онај део који уме да докаже и растумачи законе готовог дела на основу закона пропорције. Зато они архитекти, који су настојали да без научних студија постану вјешти само у практичном раду, нису могли у складу са својим напорима да стекну признања. А и они који су се ослањали само на теорију и на своје научно образовање изгледа да нису увек успјели у послу, јер су били у неизвјесности. Напротив, они који су овладали и једним и другим, као наоружани свим оружјем, брже би постизали признања за своје подухвате.

Као и у свему другом, по Витрувију, тако се и у архитектури садрже две ствари: каква ствар се приказује и шта она значи. Приказује се извјестан предмет о коме је реч; тај предмет одређује облик који је изведен на основу научних закона. Из тога се види да архитекта мора да зна и једно и друго, ако жели да буде познат. Према томе, архитекта мора бити и талентован и пријемчив за науку. Јер, ни таленат без науке, ни наука без талента, не могу да створе савшеног умјетника. Зато архитекта мора да буде писмен, вјешт у цртању и добар познавалац геометрије, да добро познаје историју, да је марљиво слушао филозофе и упознао музику, да није незналица ни у медицини, да се разуме у правна питања и да има знања из астрологије и о небеским законима.

По Витрувију, архитекта мора да буде писмен да би му памћење на основу записа било поузданије. Затим да је вјешт у цртању како би што лакше нацртаним сликама могао представити облик предмета који жели да изгради. Геометрија архитектури такође доста помаже, а на првом мејсту учи како се рукује лењиром и шестаром, да би се што лакше у равни приказали планови зграда; затим како се полажу угломјери, либела и траке за правац. Исто тако, помоћу оптике се на зградама правилно граде прозори према одређеним странама света. Помоћу аритметике се израчунавају трошкови за грађевину, одређују се односи димензија и на основу геометријских закона и метода рјешавају замршена питања симетрије. Историју треба добро знати, јер архитекти често у делима приказују различите орнаменте, па људима, ако их упитају, морају тумачити шта су то направили.

Филозофија оплемењује архитекту и не дозвољава му да буде уображен него, напротив, захтјева од њега да буде скроман, поштен и без похлепе за новцем. То је врло важно, јер се заиста не може створити ни једно дјело без поштења и савјести. Архитекта не смије бити похлепан, не смије му срцем овладати жеља да прима награде, него мора будно чувати своје достојанство и добар глас.

На основу чега се по Витрувију рјешавају питања симетрије на грађевинама?

- а) Помоћу лењира и шестара
- б) Прецизном употребом угломјера и либеле
- в) На основу закона и метода геометрије
- г) Аритметичким формулама
- д) Применом законитости филозофије и логике

Шта треба по Витрувију да зна архитекта?

- а) Архитекта треба да познаје астрологију и тумачи будућност
- б) Архитекта треба да познаје астрофизику
- в) Архитекта треба да буде алхемичар
- г) Архитекта треба да посједује знања из историје и филозофије
- д) Архитекта треба да посједује знања о натприродним силама

Од чега се по Витрувију састоји архитектура?

- а) Приказивање спољашњости и унутрашњости
- б) Геометрије, физике и медицине
- в) Љепоте и пропорција
- г) Научних закона и конструкције
- д) Од одређеног облика ствари и шта оне значе

ЗАДАТАК 4 (2 бода)

Заокружити један од понуђених одговора или дати одговор на питање. (Сваки тачан одговор вриједи 1 бод).

1. На којој од понуђених фотографија је приказана катедрала Светог Петра у Риму?



2. Силуета којег града је приказана на слици?



Позитивно рјешење задатка захтијева од кандидата развијене вјештине слободноручног цртања. Исте подразумевају: осјећај за оријентацију у простору, осјећај за перспективу и перспективна скраћења, међусобни однос једног геометријског тијела у корелацији са другим, као и у односу са околином. Уочавање тачних облика предмета и њихових пропорција, извора освјетљења и промјене линије условљене различитим освјетљењем са циљем представљања илузије дубине простора и тродимензионалности облика. Од кандидата се очекује такође да оствари јединство цртежа.

- * На фотографији је представљен примјер задатка. Препоручује се припрема на основу рада по моделу.



5.4 Примјер пријемног испита за СПГ и СПГд



УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
АРХИТЕКТОНСКО-ГРАЂЕВИНСКО-ГЕОДЕТСКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИЈЕМНИ ИСПИТ

Студијски програм
ГРАЂЕВИНАРСТВО
ГЕОДЕЗИЈА

Школска 2016/2017

САДРЖАЈ

А Математика

Б Физика

Ријешити дате задатке. Рјешења задатака написати хемијском оловком на овом листу уз текст задатка. Празне печатиране листове у прилогу користити за рад и прорачун и приложити уз тест. За рад користити хемијску оловку.

1. Упростити израз: $\left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right) : \left(\frac{x}{x-1} + 1\right)$.

Рјешење (5 бодова):

2. Ријешити неједначину: $\frac{x+1}{x+2} < \frac{x-1}{x-2}$

Рјешење (5 бодова):

3. Одредити вриједности реалног параметра m тако да једначина $mx^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - m + 3 = 0$ има реална рјешења.

Рјешење (5 бодова):

4. Наћи сва рјешења једначине:

$$\sin x + \cos 2x = 1$$

Рјешење (5 бодова):

5. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде којој је висина 18 cm, а површина дијагоналног пресека 378 cm².

Рјешење (5 бодова):

6. Обим једнакокраког троугла је 64, а крак је за 8 дужи од основице. Израчунати дужину обима O_1 њему сличног троугла чија је дужина основице 12.

Рјешење (5 бодова):

7. Одредити једначину кружнице којој је дуж АВ пречник, где је А(2,6), В(-4,-2).

Рјешење (5 бодова):

Ријешити дате задатке. Рјешења задатака написати хемијском оловком на овом листу уз текст задатка. Празне печатиране листове у прилогу користити за рад и прорачун и приложити уз тест. За рад користити хемијску оловку.

ЗАДАТАК 1

Вагон масе 20 t креће се по правом колосијеку брзином 5 m/s. У једном тренутку удари у вагон масе 30 t који је мировао. Послије судара вагони се крећу у истом смјеру једнаким брзинама. Одредити брзину вагона послије судара.

Рјешење (3 бода):

ЗАДАТАК 2

Момент инерције точка полупречника 0,2 m, који може ротирати слободно у простору, износи 190 kgm². На точак који је у почетном тренутку био у стању мировања почиње дијеловати стални момент тангенцијалне силе од 95 Nm. Одредити:

- а) угаоно убрзање,
- б) интензитет силе која производи овај моменат.

Рјешење (3 бода):

ЗАДАТАК 3

Конкавно огледало је полупречника кривине 20 cm. Одредити рачунским и графичким путем положај, тип и увећање када је удаљеност предмета од огледала 5 cm.

Рјешење (3 бода):

ЗАДАТАК 4

Колики је хидростатички притисак у води густине 1000 kg/m³ на дубини 1 km испод површине воде?

Рјешење (3 бода):

ЗАДАТАК 5

Кристијан Хајгенс, најпознатији часовничар у историји, предложио је да интернационална јединица за дужину буде дефинисана као дужина математичког клатна које има период тачно 1 s. Колика је та дужина?

Рјешење (3 бода):

